ECO1272 (A. Delacroix) **Hiver 2020**

Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur **chaque** cahier et **rendez l'examen avec les questions**.
** Aucune documentation n'est permise. Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.
** Écrivez lisiblement. **Utilisez une nouvelle page pour chaque question et indiquez en le numéro**.

- Il est **nécessaire** d'expliquer tout ce que vous faites et de détailler raisonnablement vos calculs.
- CPO: conditions de premier ordre; CSO: conditions de second ordre.

Question 1: (15 points)
Soit la fonction

$$f(x) = \ln(1 + px) - qx, \quad p > 0, \quad q < 0.$$

Étudiez la fonction f: *(i)* déterminez D_f, $D_{f'}$ et $D_{f''}$, *(ii)* calculez $f^{'}$ et $f^{''}$, *(iii)* produisez le tableau de la fonction et (*iv*) indiquez pour quelles valeurs de x la fonction est croissante/décroissante, concave/convexe.

Question 2: (15 points)
Indiquez le domaine de définition et calculez les dérivées premières et secondes des fonctions suivantes:
a. $f(x) = \sqrt{\ln x}$; b. $f(x) = xe^x$; c. $f(x) = xe^x \ln x$; d. $f(x) = ax^2 + bx + c$; e. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Question 3: (15 points)
Un monopoleur fait face à la fonction de demande

$$p = 1 - q,$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = \beta q, \quad \beta < 1.$$

a. Pourquoi requiert-on que $\beta < 1$? Répondez sans utiliser la CPO ou la CSO, mais plutôt en vous aidant des fonctions de demande et de coût.
b. Supposez que le monopoleur choisisse le prix, en tenant compte de la demande et de ses coûts de production. Exprimez le profit $\pi(p)$.
c. Quel prix p^* maximise ses profits? Quel sont la quantité q^* et le profit π^* correspondants?
d. Supposez maintenant que le monopoleur choisisse la quantité. Exprimez le profit $\pi(q)$. Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel sont le prix p^* et le profit π^* correspondants?
e. Soit deux monopoleurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. $\mathcal{A}$ produit à moindre coût que $\mathcal{B}$. Lequel des deux: produit plus? vend le plus cher? fait le plus de profits?

Question 4: (15 points)
a. Soit la fonction $f(x) = e^x(x-1)$. Utilisez les CPO et CSO pour trouver les extrema éventuels de cette fonction. Déterminez s'ils sont locaux ou globaux.
b. Soit la fonction $g_p(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} - p$, où p est un paramètre donné. Utilisez les CPO et CSO pour trouver les extrema éventuels de cette fonction. Déterminez s'ils sont locaux ou globaux.
c. Quelle est la condition sur le paramètre p pour assurer l'existence d'un extremum? Pour quelles valeurs de p est-ce que la fonction a un signe constant?

Question 5: (15 points)
a. Utilisez les CPO et CSO pour trouver les extrema de $f(x) = x - \ln x$. De quel type d'extremum s'agit-il?
b. Utilisez les CPO et CSO pour trouver les extrema de $g(x) = e^x - x$. De quel type d'extremum s'agit-il?
c. Utilisez vos réponses précédentes pour déterminer si l'équation $e^x - \ln x = 0$ a au moins une solution.

Question 6: (15 points)
a. Calculez le déterminant $|A_p|$ de la matrice

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & p & 3 \\ p & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2p \end{bmatrix}.$$

b. Soit une matrice

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Montrez que $|B| = |B^T|$.
c. Pour quelle valeur du paramètre a est-ce que la forme quadratique associée à la matrice

$$C_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

est positive définie? Écrivez cette forme quadratique "sous forme développée" comme fait en classe.

Question 7: (10 points)
a. Montrez que le produit de deux fonctions strictement croissantes et strictement positives ne peut ni avoir un maximum, ni un minimum.
b. Supposons que la fonction f ait un point stationnaire en x^*. Sous quelle(s) condition(s) est-ce que x^* est aussi un point stationnaire de la fonction $g(x) = xf(x)$?