Le problème de croissance optimale de Ramsey

- Maintenant, modèle à durée de vie infinie → modèle plus général.
- Nous commençons par résoudre le pb de façon "traditionnelle".

- Par la suite, nous utiliserons la technique de programmation dynamique sur le même problème.

Environnement

- Agent / Firmes représentatifs.
- marchés compétitifs.
- horizon infini.
- Trois biens
  - → bien de consommation,
  - → capital,
  - → travail.

  $\left.\begin{array}{l}\text{capital,}\\ \text{travail.}\end{array}\right\}$ facteurs

* $t = 0$

Ménage possède k_0 unités de capital (donné), et 1 unité de temps.

→ loue ses facteurs de production à la firme $r_0 \cdot k_0 + w_0$

+ consomme / épargne ceci.

→ sa contrainte budgétaire est $r_0 \cdot k_0 + w_0 = c_0 + k_1 - (1-\delta)k_0$

→ Ainsi, chaque période, le ménage choisit (c_t, a_{t+1}) sujet à la contrainte $R_t k_t + w_t = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t$.

→ Son pb est de :

Etant donné $\{w_t, R_t\}$,

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$\text{t.q. } R_t k_t + w_t = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

Préférences ? :

- u continue, str. croissante et str. concave, sur $\mathbb{R}^+$.
- u continûment différentiable, sur $\mathbb{R}^{++}$.
- [On suppose u bornée → $\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t)$ bornée]

  [→ sans perte de généralité...]
- $\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty$ → le choix de c sera tjs > 0.

Technologie ? $F(n, k)$ différentiable sur $\mathbb{R}^{++}$

avec : + $F(0, k) = F(k, 0) = 0$

+ $\forall k > 0$, $F(\cdot, k)$ str. croissante et str. concave.

+ $\forall n > 0$, $F(n, \cdot)$ str. croissante et str. concave.

+ Rendements d'échelle constants
$\forall p > 0$, $F(pn, pk) = p F(n, k)$

$$\left.\begin{array}{l} + \begin{cases} \lim_{n \to +\infty} F_1(n,k) = 0 & \forall k > 0 \\ \lim_{n \to 0} F_1(n,k) = +\infty \end{cases} \\ + \begin{cases} \lim_{k \to +\infty} F_2(n,k) = 0 & \forall n > 0 \\ \lim_{k \to 0} F_2(n,k) = +\infty \end{cases} \end{array}\right] \text{Inada}$$

Les conditions d'Inada sont utiles pour obtenir des solutions intérieures à l'équilibre.

+ Remarque:

Rendements d'échelle constants

$$\Rightarrow \quad F(n,k) = n\,F\left(1,\frac{k}{n}\right) = n\,f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donc

$$\begin{cases} \cdot\ F_1(n,k) = f\left(\frac{k}{n}\right) + n\left(-\frac{k}{n^2}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \\ \qquad\qquad = f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{k}{n}\, f'\left(\frac{k}{n}\right) \\ \cdot\ F_2(n,k) = n\,\frac{1}{n}\, f'\left(\frac{k}{n}\right) = f'\left(\frac{k}{n}\right) \end{cases}$$

Donc, les prix des facteurs (produit marginaux) ne dépendent que du ratio des facteurs.

(A faire: montrer que la fonction f est croissante et concave)

- Le pb de la firme est, <u>chaque période</u> :

$$\max_{n_t, k_t} F(n_t, k_t) - r_t k_t - w_t n_t$$

- Un équilibre est une liste de :
  - séquences de prix $\{w_t, r_t\}_0^{+\infty}$
  - séquences de décisions du ménage $\{c_t, k_{t+1}\}_0^{+\infty}$
  - séquences de décisions de la firme $\{n_t, k_t\}_0^{+\infty}$

telles que :

- étant donné prix, $\{c_t, k_{t+1}^o\}$ résolvent pb du ménage,
- étant donné prix, $\{n_t^d, k_t^d\}$ résolvent pb de la firme,
- les marchés (capital, travail) sont équilibrés : $\begin{cases} k_t^d = k_t^o, & \forall t. \\ n_t^d = 1, & \forall t. \end{cases}$

<u>Remarque</u> : Equilibre proprement défini.

→ liste de prix et d'allocations, telles que

1) Etant donné prix, allocations optimisent pbs des participants

marchés compétitifs

2) (A l'équilibre), les prix "balancent" les marchés

⇝ offre = demande.

Remarque :

- La définition ne requiert que l'équilibre de deux marchés (K et L) sur trois.

- D'après la loi de Walras, c'est suffisant....

- Vérifions le :

. Budget ménages $\longrightarrow$ $c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = R_t k_t + w_t$

. Maximisation des profits $\longrightarrow$ $\begin{cases} w_t = F_1(n_t, k_t) \\ R_t = F_2(n_t, k_t). \end{cases}$

. D'où $c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = F_2 . k_t + F_1 . \underbrace{n_t}_{=1}$

$= F(k_t, n_t)$

Marché des biens de consommation équilibré.

- Ecrivons le pb du ménage sous forme Lagrangienne:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \left[\beta^t u(c_t) + \lambda_t \left(R_t k_t + w_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) k_t \right) \right]$$

- Quelles sont les CPO pour consommation et épargne à une date T donnée, c_T et k_{T+1} ?

Développons la fonction objectif en partie...

$$\ldots$$

$$+ \beta^T u(c_T) + \lambda_T \left[R_T k_T + w_T - c_T - k_{T+1} + (1-\delta) k_T \right]$$

$$+ \beta^{T+1} u(c_{T+1}) + \lambda_{T+1} \left[R_{T+1} k_{T+1} + w_{T+1} - c_{T+1} - k_{T+2} + (1-\delta) k_{T+1} \right]$$

$$+ \ldots$$

(c_T et k_{T+1} n'apparaissent que dans ces deux périodes)

Alors,

$$\left.\begin{array}{ll} CPO\,[c_T] & \beta^T u'(c_T) - \lambda_T = 0 \\ CPO\,[R_{T+1}] & -\lambda_T + \lambda_{T+1}\left[R_{T+1} + 1 - \delta\right] = 0 \end{array}\right\}$$

—

Cela est vrai pour toutes les périodes,

donc $\forall t \geq 0$, $\begin{cases} \beta^t u'(c_t) = \lambda_t \\ \lambda_t = \lambda_{t+1}\left[R_{t+1} + 1 - \delta\right] \end{cases}$

Ce sont des conditions nécessaires.

Elles sont suffisantes si la condition de transversalité suivante est satisfaite :

$$\lim_{t \to +\infty} \lambda_t k_{t+1} = 0 .$$

- D'où vient cette dernière condition ?
  - Prenons un horizon fini T.
  - Les conditions nécessaires assurent optimalité période par période.
  - Mais que doit-on avoir la dernière période ?
    - soit $k_{T+1} = 0$ → tout est consommé
    - soit l'utilité marginale de la consommation est nulle $\beta^T u'(c_T) = 0$ $(\lambda_T = 0)$
  - A la place, prenons la limite → condition de transversalité

. Attaquons le pb des firmes :

$$\forall t, \quad \max_{n_t, k_t} F(n_t, k_t) - r_t k_t - w_t n_t$$

$$\text{CPO } [n_t] \qquad F_1(n_t, k_t) = w_t$$

$$\text{CPO } [k_t] \qquad F_2(n_t, k_t) = r_t$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{contrainte ménages} \\ \text{CPO ménage} \\ \text{CPO firme} \\ \text{équilibrage}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = w_t + r_t k_t \\ \beta^t u'(c_t) = \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) \left[r_{t+1} + 1 - \delta \right] \\ F_1 = w \quad \text{et} \quad F_2 = r \qquad , \forall t \\ n = 1 \quad \text{et} \quad k^o = k^d \quad , \forall t \end{array}\right.$$

$$F_2(n_t, k_t) = F_2(1, k_t) = f'(k_t)$$

$$\Longrightarrow \quad u'(c_t) = \beta\, u'(c_{t+1}) \left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \right]$$

$$\begin{cases} \text{Budget} \longrightarrow c_t + k_{t+1} = F_1(n_t, k_t) \times n_t + F_2(n_t, k_t)\, k_t \\ \text{Equilibrage} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (1-\delta)\, k_t \\ \text{CPO firmes} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t}_{\text{investissement}} = F(n, k_t) = f(k_t)$$

Conditions d'équilibre :

$$\begin{cases} u'(c_t) = \beta\, u'(c_{t+1}) \left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \right] \\ c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t = f(k_t) \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \beta^t u'(c_t)\, k_{t+1} = 0 \end{cases}$$

"Condition d' Euler"

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) \left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \right]$$

→ Indifférence entre consommer et investir.

• Si $u'(c_t) > \beta u'(c_{t+1}) \left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \right]$

→ le ménage devrait consommer plus cette période et gagner $u'(c_t)$

→ moins d'investissement → moins de consommation à $t+1$:

perte $\beta u'(c_{t+1}) \underbrace{\left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta \right]}_{\text{retour sur investissement}}$

β : escompte

$u'(c_{t+1})$: utilité marginale

Quel est le problème optimum correspondant ?

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{t.q.} \quad \underbrace{c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = f(k_t)}_{\text{contrainte de ressource agrégée}}$$

(k_0 donné)

$$\boxed{\text{Pb de croissance optimale de Ramsey}}$$

Sous forme Lagrangienne,

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \left[\beta^t u(c_t) + \lambda_t \left(f(k_t) + (1-\delta) k_t - k_{t+1} - c_t\right)\right]$$

$$\text{CPO} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\beta^t u'(c_t) + \lambda_t = 0 \\ -\lambda_t + \left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\right] \lambda_{t+1} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) \left[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\right] \\ + \text{ ressource de contrainte agrégée} \\ + \text{ condition de transversalité} \end{array} \right.$$

On voit que : Equilibre = Optimum.