Monde à 2 périodes

$u(c) = \ln c$ Taux $\alpha \beta < 1$ (escompte)

$f(k) = A\, k^{\alpha}$ Taux $\delta = 1$ (dépréciation)

[1ère approche]

Avec Lagrangien / problème optimal

$$\max \ \ln c_1 + \beta \ln c_2$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} c_t + k_{t+1} \leq A\, k_t^{\alpha}, & t = 1,2 \\ k_1 = \bar{k}_1 \\ k_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \ln c_1 + \beta \ln c_2 + \lambda_1 \left[A\, k_1^{\alpha} - c_1 - k_2 \right] + \beta \lambda_2 \left[A\, k_2^{\alpha} - c_2 - k_3 \right] + \beta \lambda_3\, k_3 .$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{CPO } [c_1] & \frac{1}{c_1} - \lambda_1 = 0. \\
\text{CPO } [c_2] & 1/c_2 - \lambda_2 = 0. \\
\text{CPO } [k_2] & -\lambda_1 + \beta\lambda_2 A \alpha k_2^{\alpha-1} = 0 \\
\text{CPO } [k_3] & -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
[\lambda_1] & \lambda_1 [A k_1^\alpha - c_1 - k_2] = 0 \\
[\lambda_2] & \lambda_2 [A k_2^\alpha - c_2 - k_3] = 0 \\
[\lambda_3] & \lambda_3 k_3 = 0
\end{array}\right\}$$

- Forcément $\lambda_1 > 0$, et $\lambda_2 > 0$. $\longrightarrow$ contraintes mordantes.
- Puisque $\lambda_3 = \lambda_2 \longrightarrow \lambda_3 > 0 \longrightarrow k_3 = 0$.

"Il ne peut être optimal de garder du capital en fin de deuxième période. "
$\to$ cela réduit c_2."

- Puisque $\lambda_i > 0 \rightarrow$ contraintes satisfaites comme égalités.

- Ainsi, $$\begin{cases} \frac{1}{c_1} = \beta \frac{1}{c_2} A \alpha k_2^{\alpha-1} \\ A \bar{k}_1^{\alpha} - c_1 - k_2 = 0 \\ A k_2^{\alpha} - c_2 - k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$ $\rightarrow$ système en (c_1, c_2, k_2, k_3)

$$\Longrightarrow \boxed{k_3^* = 0}$$

$$\Rightarrow c_2^* = A(k_2^*)^{\alpha}$$ [tout consommé à $t=2$]

$$\Rightarrow c_1^* = \frac{A(k_2^*)^{\alpha}}{\beta A \alpha (k_2^*)^{\alpha-1}} = \frac{k_2^*}{\beta\alpha}$$

$$\Rightarrow A\bar{k}_1^{\alpha} = c_1^* + k_2^* = \frac{1+\alpha\beta}{\alpha\beta} k_2^*$$

$$\Rightarrow \boxed{k_2^* = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} A \bar{k}_1^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1^* = \frac{k_2^*}{\beta\alpha} = \frac{1}{1+\alpha\beta} A \bar{k}_1^\alpha}$$

et $\boxed{c_2^* = A(k_2^*)^\alpha = A\left(\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} A \bar{k}_1^\alpha\right)^\alpha}$

$\Rightarrow$ Choix déterminés à $t=1$. $\Leftarrow$

Deuxième approche:

+ Choix faits à $t=1$ $\longrightarrow$ $(c_1^*, c_2^*, k_2^*, k_3^*)$

+ Plaçons nous à $t=2$, avec capital donné $\bar{k}_2$.

$\rightarrow$ Le nouveau problème est

$$\max \ \ln c_2$$
$$\text{t.q.} \begin{cases} c_2 + k_3 \leq A \bar{k}_2^\alpha \\ k_3 \geq 0 \end{cases}$$

similaire au problème précédent, mais à $t=2$.

On pourrait réécrire le Lagrangien correspondant mais il est clair

que $\boxed{\hat{k}_3 = 0}$ [il n'y a pas de 3è période.]

et donc $\boxed{\hat{c}_2 = A\bar{k}_2^{\alpha}}$

[Lagrangien: $\mathcal{L} = \ln c_2 + \lambda_2 (A\bar{k}_2^{\alpha} - c_2 - k_3) + \lambda_3 k_3$]

*

Que voit-on ? :

. Pas de raison que $c_2^* = \hat{c}_2$ bien sûr.

. Les choix à $t=2$ est optimal, $\forall\ \bar{k}_2$.

→ k_2 : variable d'état

$\hat{c}_2 = c_2(k_2)$ "policy function".

→ policy functions $\begin{cases} c_2 = A k_2^{\alpha} \\ k_3 = 0 \end{cases}$

→ valeur du choix $v_2(k_2) = \ln c_2$
$= \ln A + \alpha \ln k_2.$

* Maintenant qu'on a résolu le problème à $t=2$, plaçons nous à $t=1$ et supposons qu'à partir de $t=2$, nous suivrons les "policy functions".

A $t=1$, il s'agit uniquement de déterminer c_1 et k_2, étant donné que $k_1 = \bar{k}_1$.

Donc, le problème est

$$\max \; \ln c_1 + \beta v_2(k_2)$$
$$\text{t.q.} \quad c_1 + k_2 \leq A\bar{k}_1^{\alpha}$$

Anticipant que la contrainte soit mordante,

$$\max_{k_2} \; \ln[A\bar{k}_1^{\alpha} - k_2] + \beta(\ln A + \alpha \ln k_2]$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{A\alpha\beta\bar{k}_1^{\alpha}}{1+\alpha\beta}$$

$$c_1 = \frac{A\bar{k}_1^{\alpha}}{1+\alpha\beta}$$

"policy functions" de la variable d'état à $t=1$, k_1.

* La deuxième approche → programmation dynamique.

→ On a maximisé à $t=1$, en tenant compte des conséquences de nos décisions sur le reste de l'horizon considéré.

→ à $t=2$, le choix dicté par la policy function à $t=2$ sera optimal, quelque soit la décision à $t=1$.

1ère approche :	2ème approche :
Choix faits une fois pour toute à $t=1$ → (c_1, c_2, k_2, k_3) dépendent de k_1	c_1, k_2 : fonctions de k_1. c_2, k_3 : fonctions de k_2.

2ᵉ approche :

⊙ Les policy fonctions assurent que le choix est optimal chaque période, $\forall$ la variable d'état au début de la période.

→ ainsi le choix est forcément optimal sur ensemble de la période.

"Principe d'optimalité"

MONDE À T PÉRIODES :

. Cette approche peut être généralisée à n'importe quel horizon...

→ séquence de problèmes à une personne, commençant par l'ultime période...

. Le problème est de

$$\begin{cases} \max \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} \ln c_t \\ \text{t.q.} \quad c_t + k_{t+1} \leq A k_t^{\alpha} \quad t = 1 \dots T \\ \quad k_1 = \bar{k}_1 \quad (\text{et } k_{T+1} \geq 0). \end{cases}$$

. Ultime période, $t = T$. $\max \ln c_T$ tq $c_T + k_{T+1} \leq A k_T^{\alpha}$, $k_{T+1} \geq 0$

Variables de choix : c_T, k_{T+1}. Variable d'état : k_T.

- Bien sûr $k_{T+1} = 0 = g_T(k_T)$
- et donc $c_T = A k_T^{\alpha} = h_T(k_T)$

Policy functions

$$\Rightarrow \underbrace{v_T}_{\text{fonction de valeur.}} = \ln c_T = \ln A + \alpha \ln k_T = v_T(k_T)$$

. Période T-1 :

$$\max_{c_{T-1},\,k_T} \overbrace{\ln c_{T-1} + \beta \underbrace{v_T(k_T)}_{\text{assure choix optimal à partir de } t=T,\ \forall k_T.}}^{\text{assure choix optimal à partir de } T-1,\ \forall k_{T-1}}$$

$$\text{t.q.} \quad c_{T-1} + k_T \leq A k_{T-1}^{\alpha}$$

. Choix de c_{T-1} fixe k_T.

. Puisque policy functions à partir de $t=T$ sont connues et utilisées, approche assure que l'effet du choix de c_{T-1} après la période T-1 est pris en compte.

Anticipant une contrainte mordante,

$$\max_{k_T} \ln\left[A k_{T-1}^{\alpha} - k_T\right] + \beta\left[\ln A + \alpha \ln k_T\right]$$

$$\text{CPO} \Rightarrow \frac{1}{A k_{T-1}^{\alpha} - k_T} = \beta \frac{\alpha}{k_T} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{k_T = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} A k_{T-1}^{\alpha} = g_{T-1}(k_{T-1})}$$

$$\boxed{c_{T-1} = \frac{1}{1+\alpha\beta} A k_{T-1}^{\alpha} = h_{T-1}(k_{T-1})}$$

$\rightarrow v_{T-1}(k_{T-1}) = b_{T-1} + (1+\alpha\beta)\alpha \ln k_{T-1}$

Bilan : - déterminé choix optimal à partir de T, $\forall\, k_T$

- déterminé choix optimal à partir de $T-1$, $\forall\, k_{T-1}$.

- cette approche nous a permis de prendre en compte comment les choix à $T-1$ affectent les choix à T.

(voir notes)

On pourrait continuer ainsi :

A la période $(T-2)$:

$$\max_{c_{T-2},\, k_{T-1}} \ \ln c_{T-2} + \beta\, v_{T-1}(k_{T-1})$$

$$\text{t.q.} \quad c_{T-2} + k_{T-1} \leq A\, k_{T-2}^{\alpha}$$

$\rightarrow$ "Policy functions" $\begin{cases} k_{T-1} = g_{T-2}(k_{T-2}) \\ c_{T-2} = h_{T-2}(k_{T-2}) \end{cases}$

résultant en $v_{T-2}(k_{T-2})$ ...

→ On a donc déterminé la conduite optimale
- à partir de T en fonction de k_T,
- à partir de $T-1$ en fonction de k_{T-1},
- à partir de $T-2$ en fonction de k_{T-2}.

⋮

On pourrait procéder ainsi de suite :

A la date t, $\max_{c_t, k_{t+1}} \ln c_t + \beta v_{t+1}(k_{t+1})$

t.q. $c_t + k_{t+1} \leq A k_t^\alpha$

et générer des policy functions à la date t

$$\left.\begin{array}{l} k_{t+1} = g_t(k_t) \\ c_t = h_t(k_t) \end{array}\right\} \rightarrow v_t(k_t)$$

$$\begin{cases} k_{t+1} = \alpha\beta \dfrac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}} A k_t^\alpha \\[2ex] c_t = \dfrac{1-\alpha\beta}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}} A k_t^\alpha \end{cases}$$

Conclusion

1) PD : $\max_{c_t, k_{t+1}} \underbrace{\ln c_t}_{\text{utilité courante}} + \underbrace{\beta v_{t+1}(k_{t+1})}_{\text{utilité des périodes à venir, si on continue à choisir optimalement à partir de } t+1}$ t.q. $c_t + k_{t+1} \leq A k_t^\alpha$

divise problème en deux.

2) Solutions → "policy rules" pour la période considérée.
→ fonction de la variable d'état en période t, k_t.

3) Si les séquences $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=1}^{T}$ sont optimales, alors pour tout k_s donné, les séquences $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=s}^{T}$ doivent être optimales pour l'horizon restant.

$\boxed{\text{Principe d'optimalité de Bellman}}$

→ à chaque t, c_t et k_{t+1} sont donnés par les policy functions

→ $\forall t$, c_t, k_{t+1} solutions de $v_t(k_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \ln c_t + \beta v_{t+1}(k_{t+1})$

t.q. $c_t + k_{t+1} \leq A k_t^\alpha$

"Equation de Bellman"

Monde à horizon infini

- Avec un horizon fini, il faut tout faire à la main
  - → difficile dans le cas ci-dessus,
  - → impossible en général.

- Bonne nouvelle !
  - → l'horizon infini est plus facile...

Puis ça. - Pour un capital donné k (variable d'état), puisque l'horizon restant est infini quelque soit la période considérée, les "policy functions" sont en fait invariantes au temps

$$k_{t+1} = g(k_t)$$
$$c_t = g(k_t)$$

Ça d'abord - Si vous commencez 2013 et 2014 avec 100 unités de capital, votre choix de consommation est le même, puisque dans les deux cas, l'horizon restant est ∞.

☺ Rappelez-vous : Avec $T < \infty$

on avait $k_{t+1} = \alpha\beta \dfrac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}} A k_t^\alpha$

$$c_t = \frac{1-\alpha\beta}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}} A k_t^\alpha$$

Quand $T = \infty$, on ne peut commencer avec la dernière période...

mais prenons la limite quand $T \to \infty$

alors $\begin{cases} k_{t+1} = \alpha\beta A k_t^\alpha = g(k_t) \\ c_t = (1-\alpha\beta) A k_t^\alpha = h(k_t) \end{cases}$ → pas d'indice

→ Les règles de décision sont devenues invariables au temps

→ une seule règle, uniquement fonction de la variable d'état.

→ souvent, on écrit $k' = g(k) = \alpha\beta A k^\alpha$

$$c = h(k) = (1-\alpha\beta) A k^\alpha$$

$\Longrightarrow \ldots \Longrightarrow v(k) = b + \dfrac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln k$

Équation de Bellman $v(k) = \max\limits_{c} \ln c + \beta v(k')$