- Modèle utilisé pour comprendre comment:
    - les participants au marché prennent leurs décisions,
    - réagissent aux incitatifs.

- Modèle mathématique où:
    - les personnes maximisent une fonction d'utilité,
    - les firmes maximisent les profits,
    - les deux interagissent à travers un marché.

- Typiquement, le problème mathématique est un problème de maximisation sous contrainte.
    - ce sont ces contraintes qui rendent le problème intéressant.

- Pour bien commencer, il faut bien définir l'environnement dans lequel personnes et firmes évoluent...

- Un environnement est défini par:
  - des participants,
  - une structure de marché.

- Qui peut "participer" à un marché?
  - *agents* ou *ménages* ou *foyers*,
  - *firmes* ou *entreprises*,
  - *gouvernement*.

- Quelle structure de marché?:
  - marché compétitif,
  - monopole / oligopole.

Participants:

- Les agents (ou les firmes) peuvent être *homogènes* (identiques) ou *hétérogènes*.

- Les agents peuvent être hétérogènes en termes (i) d'éducation, (ii) d'âge, (iii) d'actifs, (iv) de pays...
- Les firmes peuvent être différentes en termes de technologies utilisées (productivités).

- Si les agents (firmes) sont identiques, on parle d'agent représentatif

Comment caractériser les agents et les firmes?

- Les agents maximisent leur utilité, il faut donc connaître leurs *préférences*...
    - l'utilité peut être fonction de la consommation $u(c)$, du loisir $u(c, l)$, de l'effort $u(e)$...

- Les firmes utilisent une *technologie* de production, une fonction transformant des intrants (travail, capital) en bien final y...
    - $y = f(k, l)$.

- On a précisé (i) qui participe au marché, (ii) quelles sont les fonctions mathématiques qui caractérisent les participants.

- Enfin, pour pouvoir résoudre le problème des agents et des firmes, il reste à savoir:
    - les variables qu'ils peuvent choisir afin de maximiser leur utilité (ex.: consommation, heures de travail, investissement...),
        - i.e. quelles sont leurs variables de choix,
    - si ces choix sont "contraints",
        - à quelle(s) contrainte(s) font ils face?

Quelques exemples de contraintes:

$$\left\{\begin{array}{l}
\overbrace{c}^{\text{consommation}} + \overbrace{s}^{\text{épargne}} = \overbrace{w.h}^{\text{revenus du travail}} + \overbrace{r.k}^{\text{revenus du capital}} \\
\overbrace{h}^{\text{travail}} + \overbrace{l}^{\text{loisir}} = \overbrace{1}^{\text{temps par période (normalisé)}} \\
\overbrace{C}^{\text{consommation}} + \overbrace{I}^{\text{investissement}} + \overbrace{G}^{\text{dépenses publiques}} = \overbrace{Y}^{\text{production / PIB}} \\
\overbrace{T}^{\text{taxes forfaitaires}} + \overbrace{\tau wH}^{\text{taxes sur le travail}} = \overbrace{G}^{\text{dépenses publiques}}
\end{array}\right.$$

Structure de marché:
(Nous allons principalement considérer des marchés compétitifs.)

- Grand nombre de ménages et de firmes:
  - chacun(e) est trop petite(e) pour influencer **individuellement** les prix,
  - ces prix sont donc donnés dans leurs problèmes de maximisation respectifs,
  - la maximisation (utilité/profits) de chaque participant résulte en une demande individuelle,
  - ces demandes individuelles s'agrègent pour générer une demande agrégée,
  - l'interaction de l'offre agrégée et de la demande agrégée détermine **collectivement** les prix.

- Ainsi, les participants n'ont pas d'influence individuelle sur les prix, mais ont une influence collective...
  - ceci est typique des marchés compétitifs.

On peut résoudre deux types de problèmes:

1. **problème d'équilibre**,
2. **problème optimal**.

Cela correspond à deux problèmes de maximisation posées de façon différentes et donc possiblement à deux allocations différentes des ressouces dans l'économie.

ÉQUILIBRE:

Équilibre $\Longleftrightarrow$ tout se passe par l'intermédiaire du marché.

- agent représentatif / firme représentative,

- marchés compétitifs,
- prix donnés $(p_t = 1,\ w_t,\ r_t)$ pour l'agent et la firme,

- l'agent maximise une utilité $u(c_t, l_t)$,

- la firme utilise une technologie $y_t = f(h_t, k_t)$ et maximise des profits $y_t - w_t h_t - r_t k_t$

ÉQUILIBRE - problème de l'agent:

- Agent commence période t avec un capital accumulé k_t et une allocation de temps unitaire à répartir entre travail et loisir:

$$h_t + l_t = 1.$$

- Il doit décider combien offrir de travail (h_t^o) et combien investir en capital (i_t).

- Loi de transition relie capital au début de la période, investissement et capital au début de la période suivante:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t.$$

ÉQUILIBRE - problème de l'agent:

- Le ménage maximise son utilité à *horizon infini*, en choisissant une *séquence* d'heures de travail et d'investissements, prenant les *séquences* de prix comme données, i.e.

$$\max_{\{h_t^o\}_{t=0}^{+\infty},\ \{i_t\}_{t=0}^{+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, l_t),$$

sujet chaque période à:

$$\begin{cases} h_t^o + l_t = 1, & \textit{(contrainte de temps)} \\ w_t.h_t^o + r_t.k_t = c_t + i_t, & \textit{(contrainte budgétaire des ménages)} \end{cases}$$

avec un capital initial donné k_0.

ÉQUILIBRE - problème de la firme:

- La firme maximise son profit π_t chaque période. Elle demande du travail (h_t^d) et loue du capital k_t^d afin de

$$\max_{h_t^d, k_t^d} \pi_t = f(h_t^d, k_t^d) - w_t.h_t^d - r_t.k_t^d,$$

prenant les prix w_t et r_t comme donnés.

- Le capital est loué. Si la firme possède son capital (plutôt que le louer), elle subit un coût d'opportunité qui est le même que le coût de location.

- **Remarquez que le problème de la firme est statique.**

ÉQUILIBRE: équilibrage de tous les marchés.

- Avec des marchés compétitifs, les prix des facteurs sont tels que l'offre est égale à la demande de travail. $->$ *marché équilibré*.

- Avec des masses unitaires de firmes et d'agents, les demandes et offres individuelles obtenues sont aussi égales aux demandes et offres agrégées:

$$h_t^o = h_t^d \quad et \quad k_t^o = k_t^d.$$

- L'équilibre détermine les *prix* (w_t, r_t) et les *allocations* $(k_t,\ h_t,\ y_t)$.

Définition (générique) d'un équilibre:

- Un équilibre est une liste (i) d'allocations, et (ii) de prix telles que:
  1. *étant donnés les prix*, le ménage représentatif maximise son utilité,
  2. *étant donnés les prix*, la firme représentative maximise ses profits,
  3. les prix sont tels que les marchés respectifs sont équilibrés.

ÉQUILIBRE - exemple simple - problème du ménage:

- L'économie dure une période *(problème statique)*. Le ménage possède un capital k_0 *(pas d'investissement)*.

- Le problème du ménage peut donc s'écrire:

$$\max_{h^o} u(c, l)$$
$$t.q. \quad w.h^o + r.k_0 = c \quad et \quad h^o + l = 1.$$

- Insérant contraintes dans ls fonction à maximiser, cela revient à

$$\max_{h^o} u(w.h^o + r.k_0, 1 - h^o).$$

La CPO du problème est

$$w.u_1(c, 1 - h^o) = u_2(c, 1 - h^o).$$

- Avec une fonction $u(c, l) = \ln c + A. \ln l$ par exemple, cela donne

$$w/c = A/l.$$

ÉQUILIBRE - exemple simple - problème de la firme:

- Le problème de la firme représentative peut s'écrire

$$\max_{h^d, k^d} \pi = f(h^d, k^d) - w.h^d - r.k^d,$$

ce qui donne les conditions de premier ordre suivantes:

$$\begin{cases} f_1(h^d, k^d) = w, \\ f_2(h^d, k^d) = r. \end{cases}$$

- Avec une fonction de production $y = zh^\alpha k^{1-\alpha}$, cela donne:

$$\begin{cases} z\alpha h_d^{\alpha-1}.k_d^{1-\alpha} = w, \\ z(1-\alpha)h_d^\alpha.k_d^{-\alpha} = r. \end{cases}$$

ÉQUILIBRE - exemple - équilibrage des marchés / résolution:

- Le marché des facteurs est équilibré, c'est à dire que $h^d = h^o$ et $k^d = k^o = k_0$ *(dénotons désormais le travail et le capital à l'équilibre h et k).*

- Avec une fonction de production à rendements d'échelle constants, le théorème d'Euler nous permet de conclure que
$w.h + r.k = f_1(h, k).h + f_2(h, k).k = f(h, k)$
(et donc les firmes font zéro profit économique à l'équilibre).

- De la contrainte budgétaire des ménages $c = w.h + r.k$, on conclue que $c = f(h, k)$
(pas d'investissement, donc tout ce qui est produit est consommé).

ÉQUILIBRE - exemple - équilibrage des marchés / résolution:

- Ainsi, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} f_1(h,k).u_1(c,1-h) = u_2(c,1-h), \\ c = f(h,k), \\ k = k_0. \end{cases}$$

Cela nous permet d'obtenir les allocations (c,h,k). Les prix des facteurs égalisent coûts et produits marginaux.

- Avec les préférences et la technologie supposées:

$$\begin{cases} z\alpha h^{\alpha-1}k^{1-\alpha}/c = A/(1-h), \\ c = zh^{\alpha}k^{1-\alpha}, \\ k = k_0. \end{cases}$$

- On trouve

$$h = \frac{\alpha}{A+\alpha} \quad \text{et} \quad c = z\left(\frac{\alpha}{A+\alpha}\right)^{\alpha} k_0^{1-\alpha}.$$

OPTIMUM:

Optimum $\Longleftrightarrow$ allocation qui maximise l'utilité des agents.

- L'utilité des agents dépend des allocations, pas des prix.

- Planificateur social choisit allocation de ressources pour maximiser l'utilité des agents.

—> pas de contrainte budgétaire individuelle, mais une contrainte de ressource agrégée...

—> même fonction à maximiser qu'à l'équilibre (utilité), mais des contraintes différentes (aussi pas de maximisation pour les firmes).

OPTIMUM - Problème du planificateur.

- Le PS maximise l'utilité à *horizon infini* du ménage, en choisissant une *séquence* d'heures de travail et d'investissements,

$$\max_{\{h_t\}_{t=0}^{+\infty},\ \{i_t\}_{t=0}^{+\infty}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, l_t),$$

sujet chaque période à:

$$\begin{cases} h_t + l_t = 1, & \textit{(contrainte de temps)} \\ c_t + i_t = f(h_t, k_t), & \textit{(contrainte de ressource agrégée)} \end{cases}$$

avec un capital initial donné k_0. La loi de transition du capital $k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$ s'applique toujours.

OPTIMUM - exemple:

Nous reprenons le même exemple statique.

Le PS

$$\max_h u(c,l) \text{ t.q. } c = f(h, k_0) \; et \; h + l = 1.$$

Insérant contraintes dans l'objectif, la CPO est

$$f_1(h, k_0).u_1(c, 1-h) = u_2(c, 1-h).$$

On voit que c'est la même CPO que pour le problème d'équilibre.

ÉQUILIBRE VS. OPTIMUM

1. Quand les allocations d'équilibre et les allocations optimales coïncident, on dit que l'équilibre est **efficace**.
2. Dans ce cas, un PS qui pourrait choisir les allocations (optimales) pour maximiser l'utilité des ménages, ne pourrait faire mieux que le marché laissé à lui même!
3. Bien sûr, ce n'est pas toujours le cas pour tous les environnements. Par exemple, s'il y a des externalités ou des taxes distortionnaires...
4. L'optimum sert de repère: meilleure allocation possible.
5. Lorsque l'équilibre est efficace, il peut être plus aisé de résoudre l'optimum que l'équilibre.

Interprétation intuitive des CPO d'équilibre - ménages:

- Revenons aux CPO à l'équilibre et essayons d'en tirer de l'intuition.

- Pour les ménages, le choix des heures de travail h^0 est tel que $w.u_1(c, 1-h^o) = u_2(c, 1-h^o)$.

- Cela doit être le cas, car si

$$\underbrace{u_2(c, 1-h^o)}_{\text{gain à } \uparrow \text{ loisir}} > \underbrace{w.u_1(c, 1-h^o)}_{\text{perte à } \downarrow \text{ consommation}},$$

alors le ménage augmenterait son utilité en réduisant ses heures de travail.

Interprétation intuitive des CPO d'équilibre - firmes:

- Pour les firmes, le choix des facteurs de production est tel que:

$$\begin{cases} f_1(h^d, k^d) = w, \\ f_2(h^d, k^d) = r. \end{cases}$$

- Le coût d'un facteur doit être égal à son rendement marginal. Si

$$\underbrace{f_1(h^d, k^d)}_{\text{prod. marginal travail}} > \underbrace{w}_{\text{coût marginal travail}},$$

alors la firme devrait embaucher plus de travailleurs.