ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I - Examen final **Hiver 2017**
Professeur: Alain Delacroix

ATTENTION: Dans tout l'examen, chercher les extrema d'une fonction veut dire: "Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Trouvez-vous des maxima/minima, locaux/globaux ou un/des points de selle? Expliquez tout.".

Question 1 (15 points):
a. Vérifiez que $f(x,y) = g(x)\ln y - h(x)$ n'a pas d'extremum si $g(x)$ est toujours strictement positif (ou toujours strictement négatif). Expliquez.
b. Soit f une fonction additivement séparable, que nous pouvons donc écrire $f(x,y) = g(x) + h(y)$. Montrez que la fonction f ne peut avoir d'extremum, si les "sous-fonctions" g et h sont de courbures différentes (i.e. f est concave et g convexe, ou vice versa). Expliquez.
c. Cherchez les extrema de

$$f(x,y) = \ln(xy) - \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}, \quad \text{où} \ \ \alpha > 0 \ \ \text{et} \ \ \beta > 0.$$

d. Sous quelle condition sur les paramètres (α, β) est-ce que la fonction f reste négative sur son domaine? Expliquez.

Question 2 (10 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (x-y)^2.$$

Cherchez les extrema de la fonction f.

Question 3 (15 points):
Soit la fonction suivante $f(x,y) = \ln[g(x) + h(y)]$.
a. Est-ce que la fonction f est additivement séparable? Montrez que la fonction f ne peut avoir d'extremum si $g(x)$ ou $h(y)$ n'ont elles-mêmes pas de point stationnaire.
c. Soit la fonction

$$f(x,y) = x - \ln x + y + e^{-py},$$

où p est un paramètre strictement positif. Cherchez les extrema de cette fonction. Quelle est la valeur que la fonction atteint à cet extremum (en fonction de p).
d. Est-ce que l'équation $x - \ln x + y + e^{-y} = 1$ a une solution (en (x,y))? Est-ce que l'équation $x - \ln x + y + e^{-y} = 3$ a une solution? Expliquez.

Question 4 (10 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + py^2,$$

où p est un paramètre quelconque.
a. Trouvez une condition sur p pour que la fonction ait un point stationnaire unique. Expliquez.
b. En supposant qu'il y ait un point stationnaire, quelle condition sur p assure qu'on ait un minimum global? Expliquez.
c. Que peut-on dire si la condition en (b) n'est pas respectée?

Question 5 (15 points):
a. On pose le problème de minimisation sous contrainte suivant:

$$\min_{x,y} \; 1 - \ln(5-x) - \ln(7-y) \quad t.q. \quad x + y = 10.$$

Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire. Est-ce que les conditions de second ordre sont satisfaites? S'il existe, quelle est la valeur M^* de la fonction au point stationnaire?

Question 6 (15 points):
On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y} \; 1 - x\ln x - y\ln(y^2) \quad t.q. \quad x + 2y = T.$$

où x, y et T sont strictement positifs.
a. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*, λ^*). Expliquez.
b. Vérifiez que les conditions de second ordre sont satisfaites. Expliquez.
c. Quelle valeur M^* la fonction atteint-elle au point stationnaire?
d. Trouvez deux façons différentes la dérivée de M^* par rapport à T.

Question 7 (20 points):
a. On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y} \; \sqrt{\sqrt{xy}} \quad t.q. \quad x + py = T,$$

où l'on restricte (x,y) et (p,T) à être strictement positifs. Trouvez le maximum de cette fonction sous la contrainte ci-dessus, en passant par les conditions de premier et second ordre.
b. Calculez la valeur M^* atteinte. Trouvez une condition entre T et p pour assurer que $M^* \geq 1$.
c. Quel théorème faut-il utiliser pour obtenir la dérivée de M^* par rapport à T? Quelle valeur ce théorème donne-t-il?