Introduction aux fonctions d'une variable

Décembre 2016

Qu'est-ce qu'une fonction?

- Soit deux ensembles X et Y. Une fonction f de X dans Y est une "règle" associant un élément de Y à tout élément de X:

$$\begin{cases} f : X \mapsto Y, \\ \text{où } y = f(x). \end{cases}$$

- L'ensemble X est le *domaine* de la fonction f, dénoté D_f.

- Typiquement dans ce cours, $X \subset \mathbb{R}^n$ et $Y = \mathbb{R}$.

  Un élément de X sera de la forme $(x_1, ..., x_n)$ où tous les x_i sont des nombres réels et y sera aussi un nombre réel.

Quelques fonctions communes

- *Fonctions linéaires*:

$$f(x) = ax + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Fonctions quadratiques*:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

- *Fonctions "puissance"*:

$$f(x) = ax^b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Fonctions "exponentielles", base b*:

$$f(x) = ab^x, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction exponentielle

- Parmi toutes les fonctions exponentielles, une d'entre elles est spéciale, quand la base est $e \approx 2,71828...$

$$f(x) = e^x.$$

- On la dénotera *la fonction exponentielle*, sans préciser de base.

La fonction logarithme

- *Fonction logarithme*: La fonction "log" est définie comme suit,

$$y = \ln x \iff x = e^y.$$

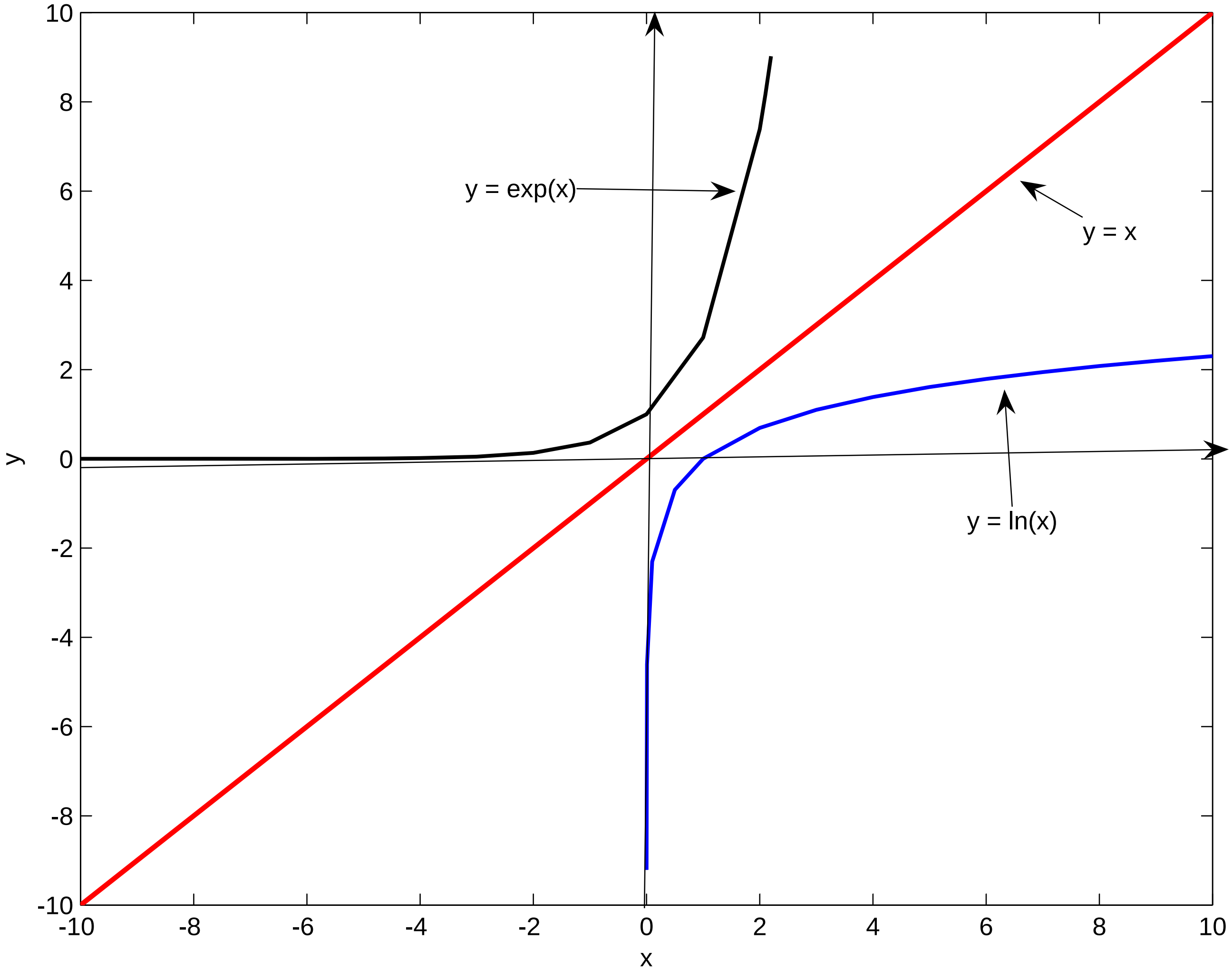
- Autrement dit, la fonction log est telle que

$$e^{\ln x} = x,$$

et / ou

$$\ln(e^y) = y.$$

- **Attention:** la fonction "log" n'est définie que pour $x > 0$.



y = exp(x)
y = x
y = ln(x)
x
y
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

Compléments sur les fonctions "log" et "exp"

- Fonction exponentielle:

$$\begin{aligned} e^{-\infty} &\rightarrow 0, \\ e^{0} &= 1, \\ e^{+\infty} &\rightarrow +\infty, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \; .$$

- Fonction logarithme:

$$\begin{aligned} \ln(0^+) &\rightarrow -\infty, \\ \ln(1) &= 0, \\ \ln(+\infty) &\rightarrow +\infty, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0 \; , \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= 0 \; . \end{aligned}$$

Rappel sur les exposants

- Soit une constante a et (p, q) des exposants. Nous rappelons les règles suivantes:

$$\begin{cases} a^p a^q = a^{p+q}, \\ (a^p)^q = a^{pq}, \\ a^0 = 1, \\ a^{-p} = \frac{1}{a^p}, \\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}. \end{cases}$$

- *Remarque #1:* Ces règles s'appliquement pour tout a, donc en particulier pour $e \approx 2,71828...$

- *Remarque #2:* Les exposants peuvent être n'importe quel réel. En particulier, $a^{1/p} = \sqrt[p]{a}$.

Rappel sur la fonction log

- Soit (x, y) deux réels strictement positifs:

$$\begin{cases} \ln(xy) = \ln x + \ln y, \\ \ln(x^n) = n \ln x, \\ \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y. \end{cases}$$

Composition de fonctions

- On peut *composer* deux fonctions f et g.
- Cela consiste à appliquer la fonction f, pas sur x, mais sur $g(x)$.
- La composition se dénote par le symbole '$\circ$' ("rond"). Il sagit de calculer $y = g(x)$, puis $z = f(y)$ pour obtenir

$$z = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

- **Attention:** La fonction $f \circ g$ est différente de la fonction $g \circ f$.

Fonctions continues (1)

- *Une fonction continue est une fonction qu'on peut tracer d'un trait, sans lever son stylo...*

  - Définition: Une fonction f est continue en x_0 si

    $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

  - *Interprétation de la définition*:

    Je peux rapprocher $f(x)$ autant que je le veux de $f(x_0)$ [distance inférieure à ε]. Comment? Il suffit de choisir x suffisament proche de x_0 [distance inférieure à δ].

  - Définition:

    Une fonction f est continue, si elle est continue en tout point.

Fonctions continues (2)

- *Intuition #1:* Une fonction f est continue en x_0, si quand x est proche de x_0, alors $f(x)$ est proche de $f(x_0)$.

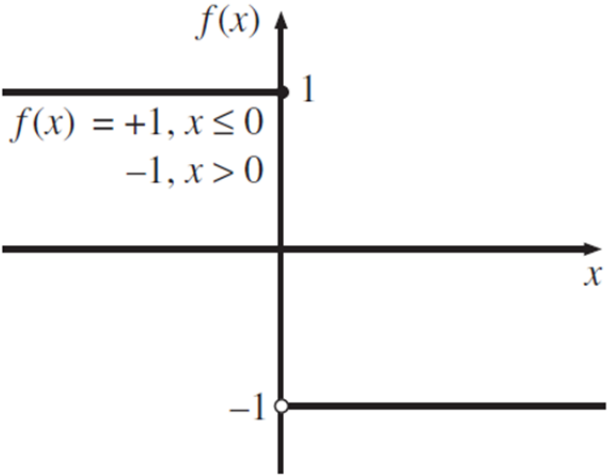
- *Intuition #2:*

  Graphiquement, la courbe $y = f(x)$ n'a pas de "saut"...

- Dans ce cas, on écrit:

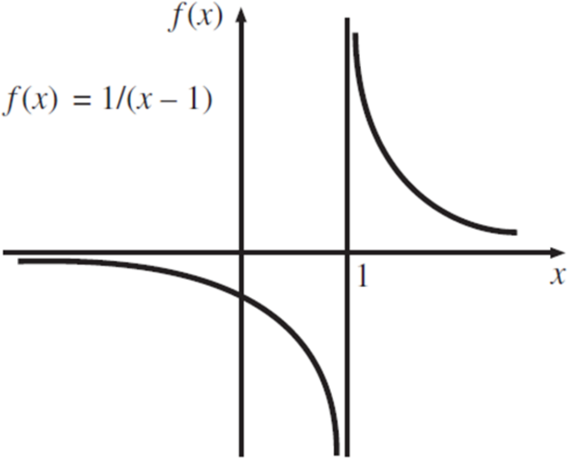
$$\begin{array}{l} f(x) \longrightarrow f(x_0) \\ x \longrightarrow x_0 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Exemples de fonctions discontinues:



Fonction discontinue à $x = 0$.

Exemples de fonctions discontinues:



Fonction discontinue à $x = 1$.

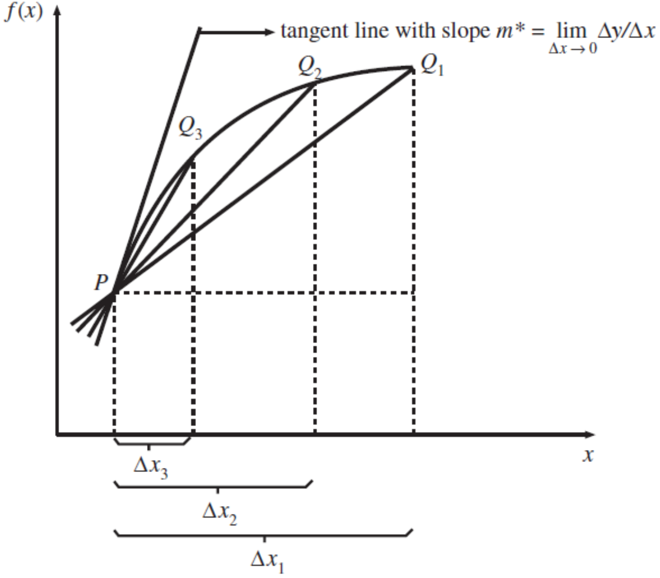
Fonctions continues (3)

- Les fonctions linéaires, quadratiques, "puissance", exponentielles et logarithmique sont continues.

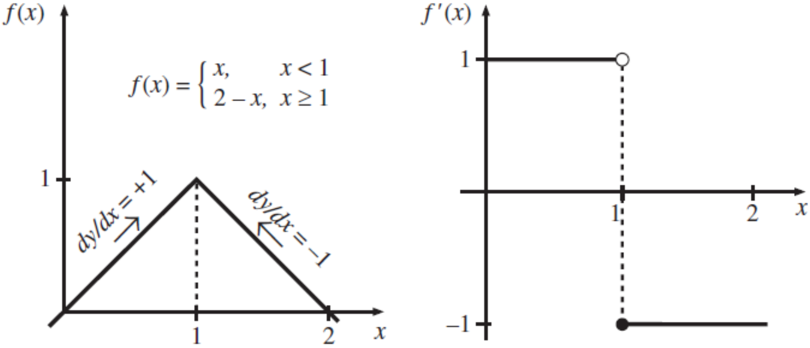
- Soit (f, g) deux fonctions continues et a une constante.
  - la fonction $a.f(x)$ est continue,
  - la fonction $f(x) + a$ est continue,
  - la fonction $f(x) \mp g(x)$ est continue,
  - la fonction $f(x).g(x)$ est continue,
  - la fonction $f(x)/g(x)$ est continue, quand $g(x) \neq 0$,
  - la fonction $f \circ g$ est continue.

Fonctions différentiables (1)

- *Une fonction différentiable est une fonction dont on peut calculer la pente...*
  - Soit $P\ [(x_1, f(x_1))]$ et $Q\ [(x_2, f(x_2))]$ deux points sur la courbe de f. Le taux d'accroissement entre P et Q est
  $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$
  - La dérivée au point P est la limite du taux d'accroissement quand Q tend vers P. Donc,
  $$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{dy}{dx}.$$
  Cela mesure la pente de la courbe au point P.
  - Une fonction est différentiable, si elle est différentiable partout.


$f(x)$
tangent line with slope $m^* = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$
Q_2
Q_1
Q_3
P
x
Δx_3
Δx_2
Δx_1

Une fonction non-dérivable (= non-différentiable)



Au point $x = 1$, les pentes à gauche et à droite sont différentes.

Fonctions différentiables (2)

- Règles de dérivation:

$$
\begin{cases}
\text{Si } f(x) = a \in \mathbb{R}, \text{ alors } f'(x) = 0, \\
\text{Si } f(x) = x^n, \text{ alors } f'(x) = nx^{n-1}, \\
\text{Si } f(x) = e^x, \text{ alors } f'(x) = e^x, \\
\text{Si } f(x) = \ln x, \text{ alors } f'(x) = \frac{1}{x}. \qquad (x > 0)
\end{cases}
$$

Fonctions différentiables (3)

- Règles de composition:
  Soit (f, g) deux fonctions différentiables et a une constante.

$$\begin{cases} (f+a)' = f', & \textit{(constante additive)} \\ (a.f)' = a.f', & \textit{(constante multiplicative)} \\ (f+g)' = f' + g', & \textit{(addition)} \\ (f-g)' = f' - g', & \textit{(soustraction)} \\ (fg)' = f'g + fg', & \textit{(multiplication)} \\ (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad [si\ g(x) \neq 0], & \textit{(division)} \end{cases}$$

Fonctions différentiables (4)

- Soit (f, g) deux fonctions différentiables.

- La dérivée de la composée est donnée par

$$(f \circ g)' = (f' \circ g).g'.$$

- Autrement dit,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Fonctions différentiables (5)

- Soit f une fonction différentiable. La fonction f' peut elle-même être différentiable...
- La "dérivée de la dérivée" est dénotée la dérivée seconde, $f''(x)$.
- La dérivée première $f'(x_0)$ nous dit comment la fonction f varie en x_0.
  - la dérivée seconde $f''(x_0)$ nous dit comment f' et donc *la pente de la fonction* varie en x_0.
    - elle nous apprend quelque chose sur la *courbure* de la fonction...

Monotonicité (1)

- *Une fonction monotone est soit croissante, soit décroissante sur un intervalle.*

  - Définition:

    Une fonction f est strictement croissante (sur un intervalle contenant x et x_0) si

    $$x > x_0 \implies f(x) > f(x_0).$$

  - Caractérisation:

    Si la dérivée de f au point x_0 est strictement positive, alors f est strictement croissante autour de x_0.

    (si la pente est strictement positive, alors la fonction est strictement croissante)

Monotonicité (2)

- Définition:

  Une fonction f est strictement décroissante (sur un intervalle contenant x et x_0) si

  $$x > x_0 \implies f(x) < f(x_0).$$

- Caractérisation:

  Si la dérivée de f au point x_0 est strictement négative, alors f est strictement décroissante autour de x_0.

  (si la pente est strictement négative, alors la fonction est strictement décroissante)

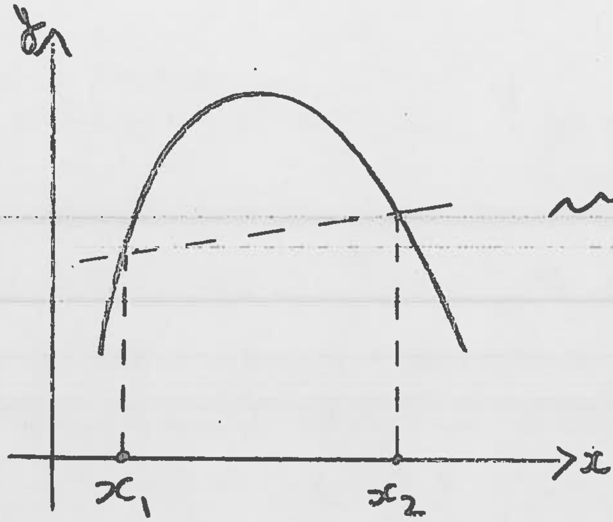
Courbure (1)

- *La courbure de la fonction détermine sa forme générale: en-dessous ou au-dessus de sa tangente?*
  - <u>Définition:</u> Soit une fonction f, deux points quelconques (x_1, x_2).

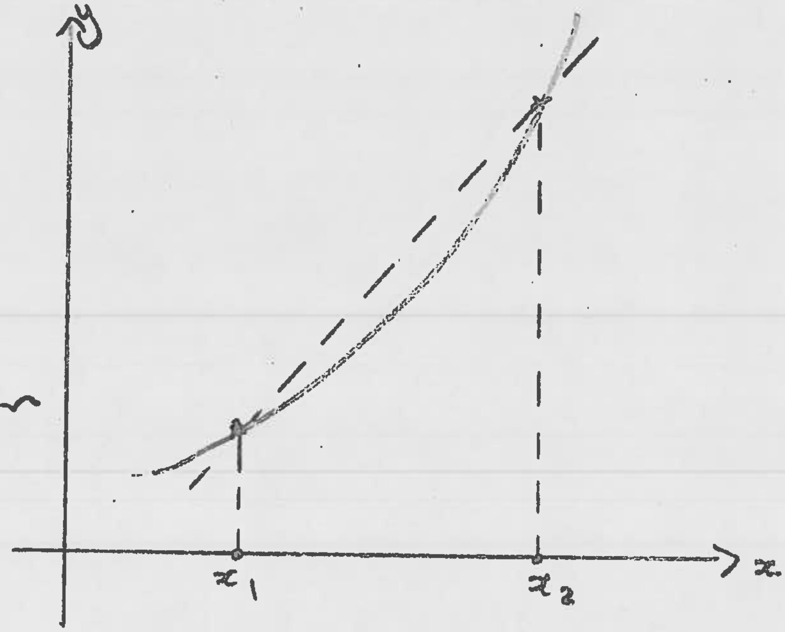
    La fonction f est strictement concave si, entre *chaque* paire de points (x_1, x_2), la courbe se trouve toujours strictement au-dessus du segment joignant les points x_1 et x_2.
  - <u>Définition:</u>

    La fonction f est strictement convexe si, entre *chaque* paire de points (x_1, x_2), la courbe se trouve toujours strictement en-dessous du segment joignant les points x_1 et x_2.

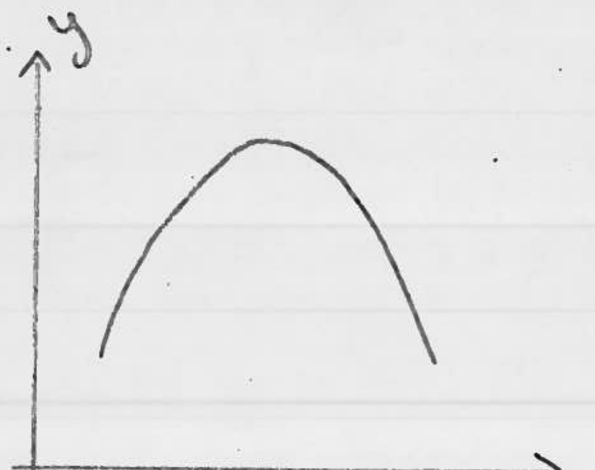
Courbure de Fonctions



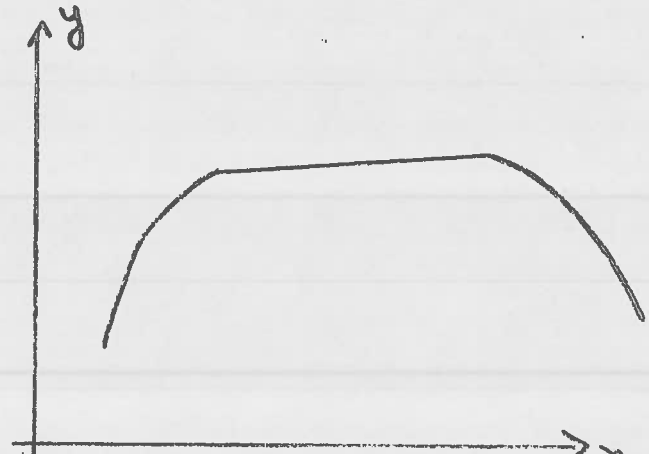
strictement concave



strictement convexe



strictement concave



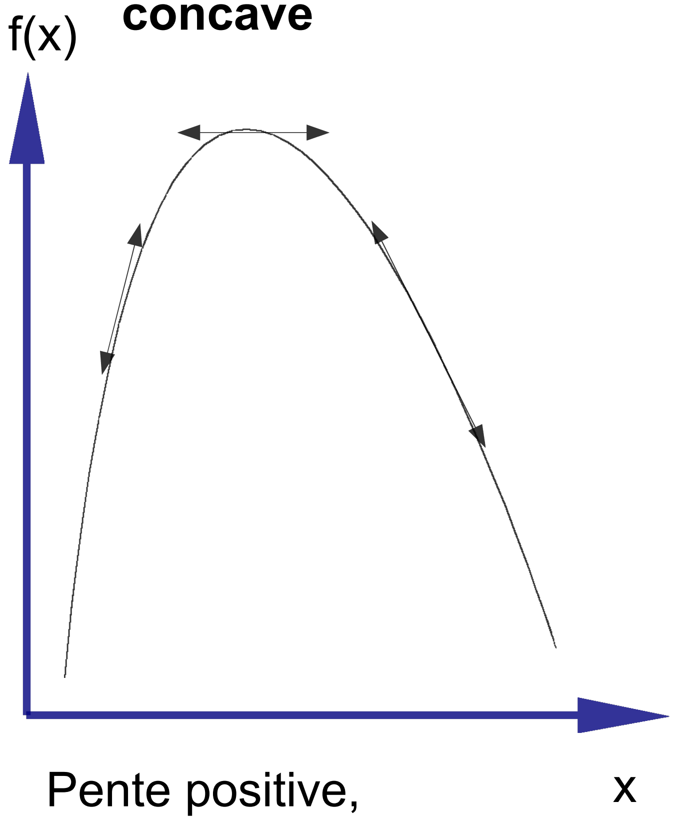
concave

Courbure (2)

- Caractérisation:

Type de fonction	Signe $f''(x)$	Conditions
Convexe	$f''(x) \geq 0$	$\forall x$, domaine de définition.
Concave	$f''(x) \leq 0$	$\forall x$, domaine de définition.
Strictement convexe	$f''(x) > 0$	$\forall x$, domaine de définition, sauf peut-être en un point.
Strictement concave	$f''(x) < 0$	$\forall x$, domaine de définition, sauf peut-être en un point.

Fonction strictement concave



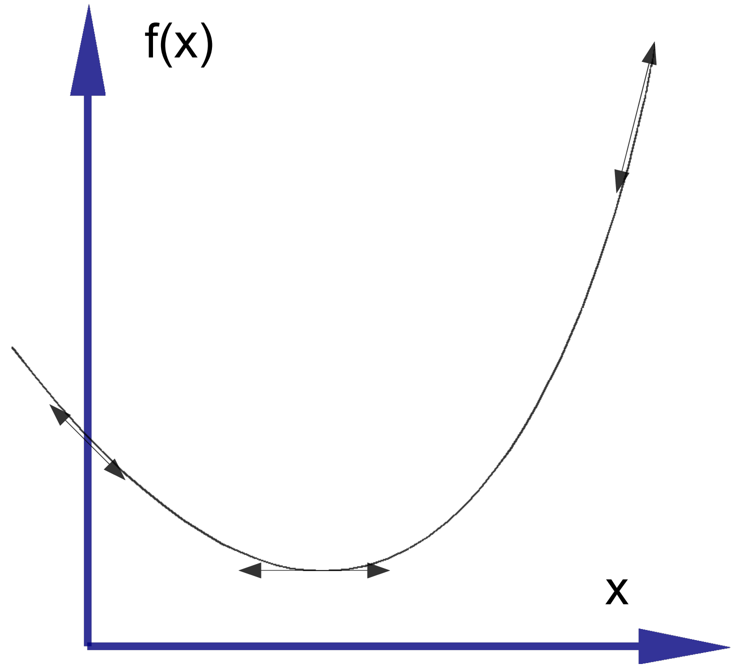
Pente positive,
… puis zéro,
… puis négative.

Donc, la pente décroît.

Donc, f ' (x) décroît.

Donc, f '' (x) < 0.

Fonction strictement convexe



Pente négative,
… puis zéro,
… puis positive.

Donc, la pente croît.

Donc, f ' (x) croît.

Donc, f '' (x) > 0.

Récapitulatif

- **Notions importantes:**
  - les fonctions logarithme et exponentielle,
  - la composition de fonctions,
  - la continuité,
  - la différentiabilité (et les règles de dérivation),
  - le lien entre monotonicité et la dérivée première,
  - le lien entre courbure et la dérivée seconde.

Appendice A: Quelques résultats “classiques”

- **Théorème des valeurs intermédiaires:**

  Soit une fonction f *continue* sur un intervalle $[a, b]$ et c un réel entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = c$.

- *Intuition:* Le théorème dit qu'une fonction continue passe par *tous* les points entre $f(a)$ et $f(b)$...
- *Remarque:* Le théorème peut être étendu aux cas où les bornes a et b sont $\pm\infty$.

- Il est très utile pour montrer qu'une équation du type $f(x) = 0$ a une solution. Il suffit pour cela de montrer que

  (i) que f est continue,
  (ii) qu'il existe deux réels (a, b) tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

Appendice A: Quelques résultats "classiques"

- Soit un polynôme de degré n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

- La limite que prend ce polynôme quand $x \to \pm\infty$ est uniquement déterminée par son terme de plus haut ordre $(a_n x^n)$.

- *Intuition:* Quand $x \to \pm\infty$, tous les monômes $(a_i x^i)$ tendent vers $\pm\infty$. Cependant, celui de plus haut degré domine les autres, et son effet détermine la limite du polynôme.

Appendice A: Quelques résultats “classiques”

- Soit $f(x)$ une fonction différentiable. La règle sur la dérivée de fonctions composées peut être utilisée pour trouver que

$$\begin{cases} (\ln f)' = \underbrace{\frac{1}{f}}_{\text{(dérivée ln)}} \cdot \underbrace{f'}_{\text{(dérivée de } f\text{)}} = \frac{f'}{f} & (si\ f(x) > 0) \\ (e^f)' = \underbrace{e^f}_{\text{(dérivée exp)}} \cdot \underbrace{f'}_{\text{(dérivée de } f\text{)}} = f'e^f \\ (f^n)' = \underbrace{nf^{n-1}}_{\text{(dérivée puissance)}} \cdot \underbrace{f'}_{\text{(dérivée de } f\text{)}} = nf'f^{n-1} \end{cases}$$

Appendice B: Fonctions utilisées en économie

- La *fonction de production*

$$\underbrace{Y}_{\text{production}} = F(\underbrace{H}_{\text{travail}}, \underbrace{K}_{\text{capital}}) = H^{\alpha} K^{1-\alpha}.$$

Quand $0 < \alpha < 1$, la fonction est croissante et concave en H et en K (pris séparément).

- Exemples de fonction d'utilité:

$$u = \begin{cases} \ln c + \ln l & \textit{(consommation-loisir)} \\ \sqrt{c_a c_b} & \textit{(consommation biens } A, B\textit{)} \\ w - e & \textit{(salaire-effort)} \end{cases}$$

Les deux premières fonctions sont croissantes et concaves.

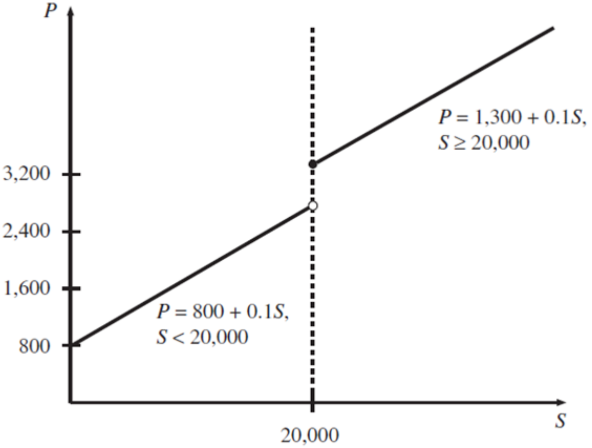
App. C: Programmes économiques discontinus

- Salaire et bonus à partir d'un seuil.
- Support au revenu, avec condition de ne pas travailler.
- Compétition "à la Bertrand".

▶ **Remarque:** Un système d'imposition avec taux marginaux est continu, mais non-différentiable.

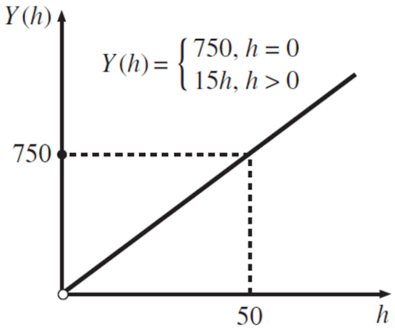
Salaire + bonus

Considérez les implications d'être proche du niveau de ventes de \$20,000 par période, quand la fin du mois approche.



Un programme de support aux revenus discontinu

Considérez l'incitatif à travailler un "petit nombre d'heures" comparé à zéro heure.



Un système d'impôts sur les revenus non-différentiable

$$\text{Marginal tax rate} = \begin{cases} 0, & \text{for } 0 < y \leq 5{,}000 \\ 0.15, & \text{for } 5{,}000 < y \leq 15{,}000 \\ 0.25, & \text{for } y > 15{,}000 \end{cases}$$

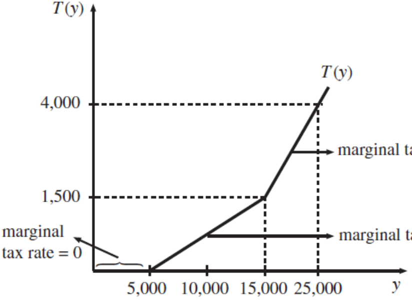


Figure 5.15 Income tax schedule for example 5.2

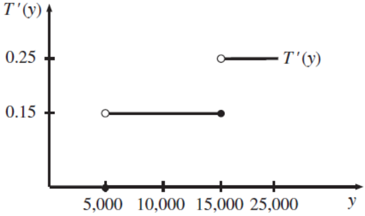


Figure 5.16 Marginal income tax function for example 5.2

Appendice D: Exercices pratiques

Calculez les dérivées des fonctions suivantes:

- $f(x) = 3x^{20} - 19x + e^x$,
- $f(x) = x^2$, en utilisant (i) les fonctions "puissance" et (ii) le produit de fonctions,
- $f(x) = 3x. \ln x$,
- $f(x) = 1/x$, en utilisant (i) les fonctions "puissance" et (ii) le quotient de fonctions,
- $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$,
- $f(x) = e^{2x+3}$, en utilisant la composition de fonctions.

Montrez que $(f + g + h)' = f\,' + g\,' + h\,'$.

Appendice D: Exercices pratiques

- Le tableau de variations d'une fonction se bâtit:

  1. en calculant f, f' et f'' *(avec domaines).*
  2. en étudiant le signe de la dérivée seconde, pour savoir si la dérivée première est une fonction croissante ou décroissante.
  3. à partir de là, on étudie le signe de la dérivée première, pour savoir si la fonction est croissante ou décroissante.
  4. suivant les cas, on peut être amené à:
     a. trouver les points qui annulent f, f' et f'',
     b. calculer les valeurs maximales de la fonction et ses limites à $\pm\infty$.

- L'acétate suivante offre un exemple.

Etude de $f(x) = x^3 - 3px^2$, $p > 0$.

- Domaines : $D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$.
- $f'(x) = 3x(x-2p)$ et $f''(x) = 6(x-p)$

- Dérivée seconde ?

$$x < p \longrightarrow f''(x) < 0 \longrightarrow f'(x) \downarrow$$

$$x > p \longrightarrow f''(x) > 0 \longrightarrow f'(x) \uparrow$$

D'où

x	$-\infty$		p		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-3p^2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\left[\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f'(p) = -3p^2. \right]$$

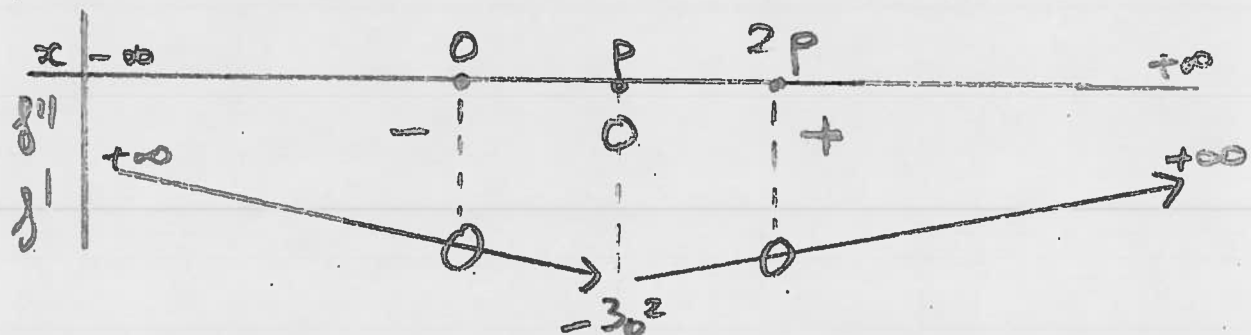
Etude de $f(x) = x^3 - 3p\,x^2$, $\quad p > 0$.

Dérivée première ?

- Puisque $f'(p) < 0$, $\begin{cases} \text{il existe 1 racine entre } -\infty \text{ et } p, \\ \text{il existe 1 racine entre } p \text{ et } +\infty. \end{cases}$

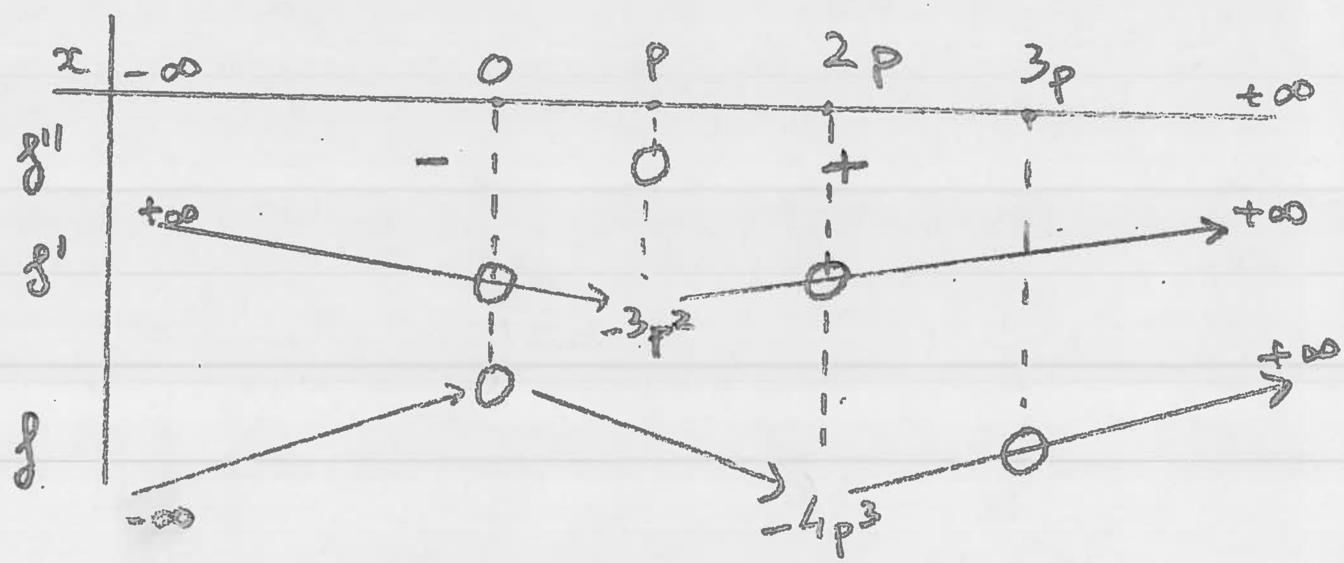
- Par inspection de f', ces racines sont 0 et $2p$.

- D'où



- Donc, $\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \text{ ou } x \in (2p, +\infty) \longrightarrow f'(x) > 0 \longrightarrow f(x) \uparrow \\ x \in (0, 2p) \longrightarrow f'(x) < 0 \longrightarrow f(x) \downarrow \end{cases}$

- D'où :

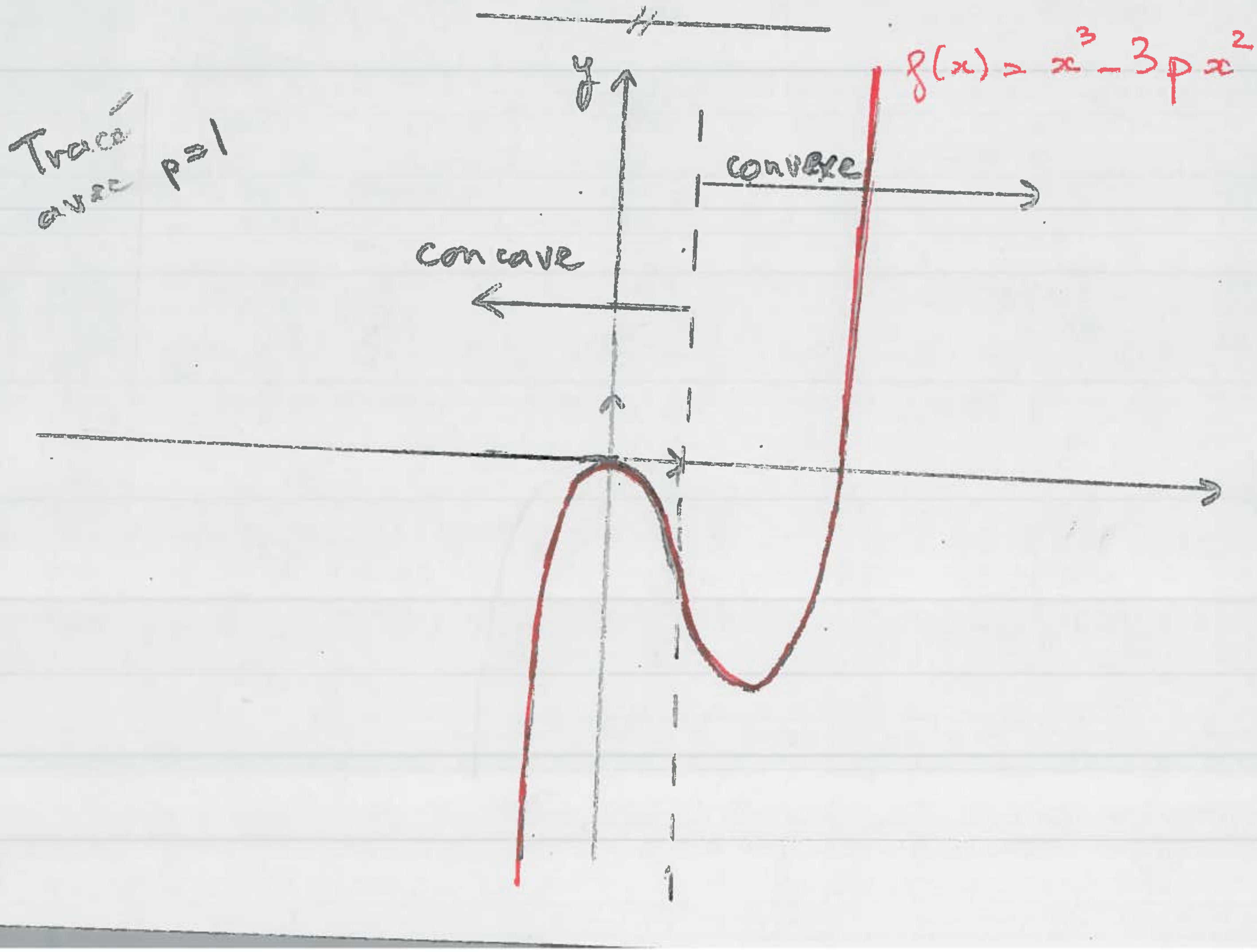


Etude de $f(x) = x^3 - 3px^2$, $p > 0$.

- Le tableau a été complété en calculant les limites de $f(x)$ à $\mp\infty$, et en calculant les valeurs $f(0)$ et $f(2p)$.

- Comme $f(2p) < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il y a une racine entre $2p$ et $+\infty$.

  $\rightarrow$ par inspection de $f(x) = x^2(x-3p)$, cette racine est $3p$.



Etude de la fonction Log

- Domaines ? $\quad D_f = D_{f'} = D_{f''} = (0, +\infty)$

- $f(x) = \ln x \implies f'(x) = 1/x \implies f''(x) = -1/x^2$.

- Signe dérivée seconde ?:

$f''(x) < 0 \rightarrow f'(x)$ strictement décroissante.

D'où :

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	
$f'(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0^+

$\left[\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0^+ \right]$

Signe dérivée première ?

$f'(x) > 0 \implies f(x)$ strictement croissante.

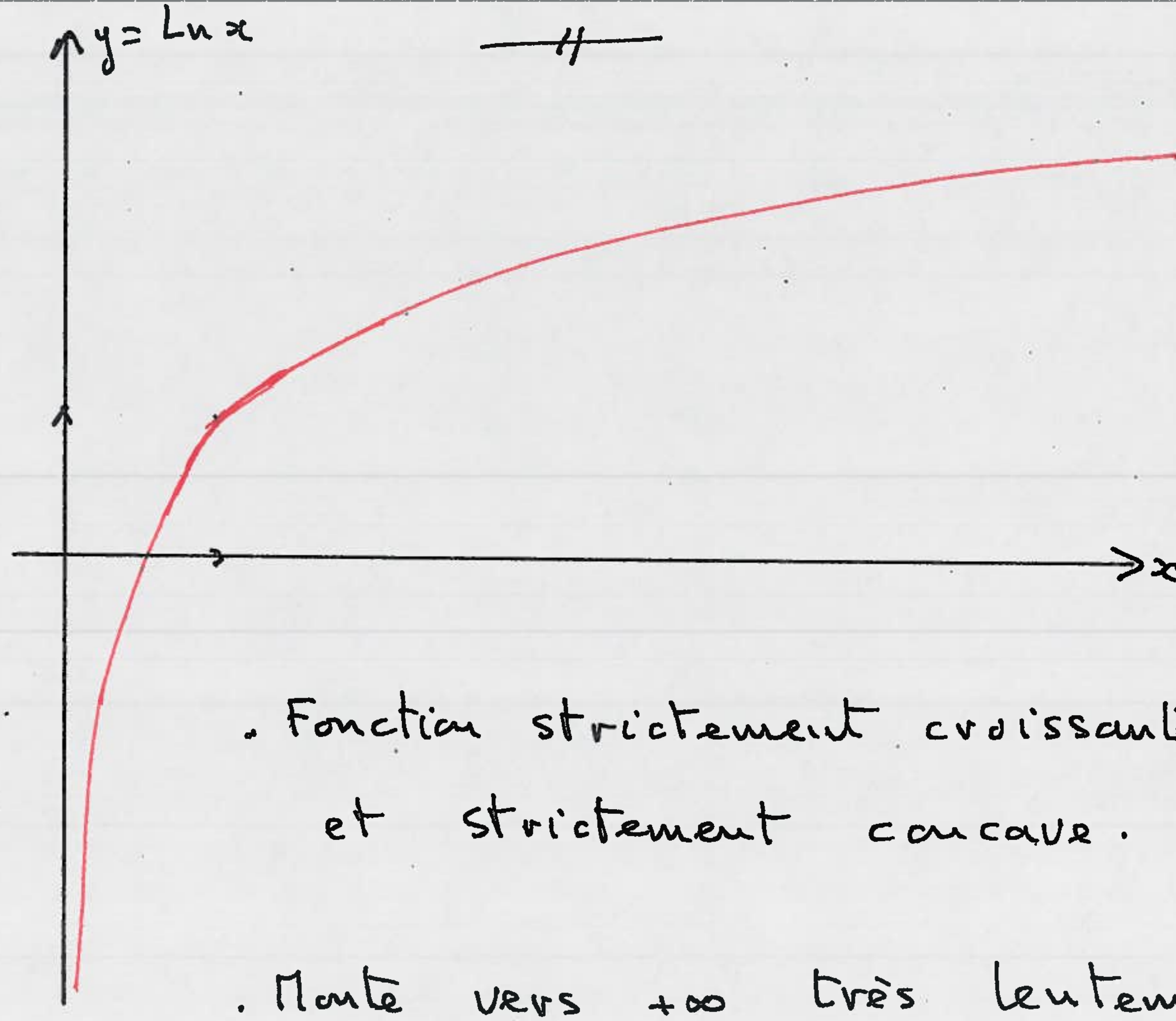
D'où

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$			$-$	
$f'(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0^+
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

+ Comme $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

il existe un point où la fonction s'annule.

→ ce point est $x_0 = 1$.



. Fonction strictement croissante et strictement concave.

. Monte vers $+\infty$ très lentement. (pente à $+\infty$ tend vers 0.)

Etude de la fonction exp

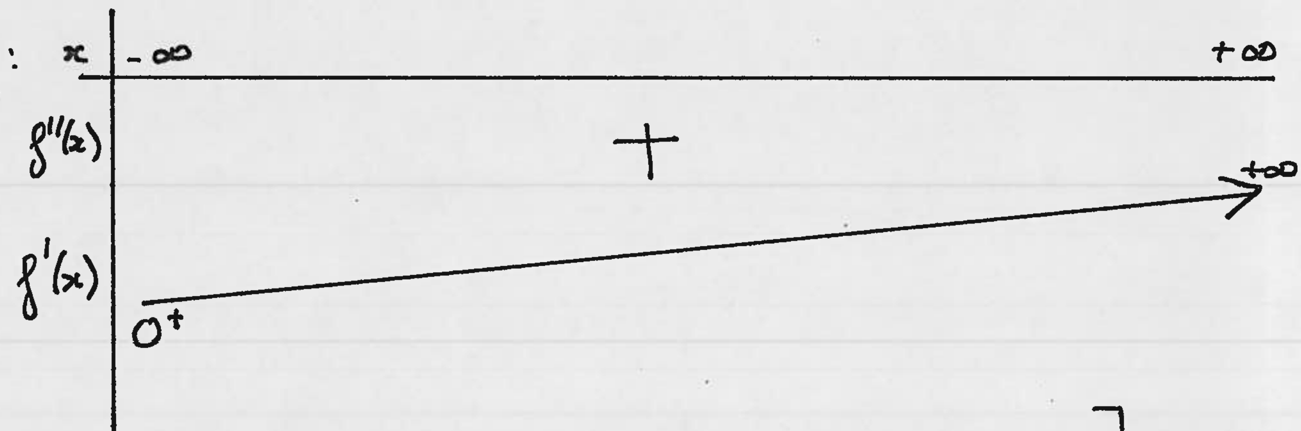
. Domaines ? $D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$

. $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x \Longrightarrow f''(x) = e^x$.

. Signe dérivée seconde ?

$f''(x) > 0 \Longrightarrow f'(x)$ strictement croissante :

D'où :

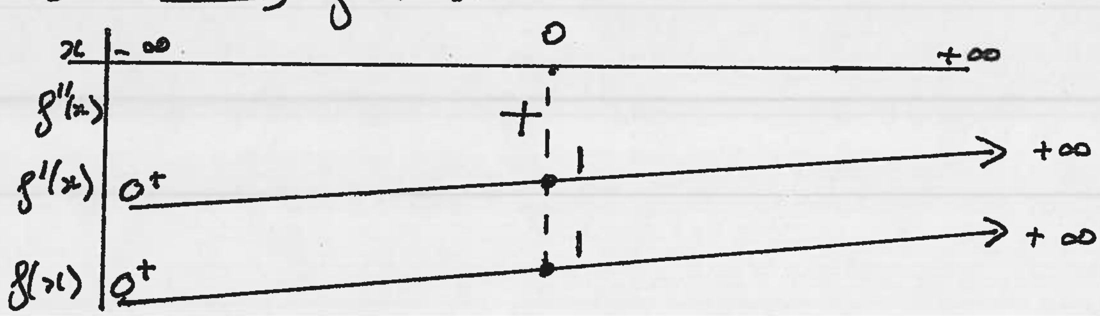


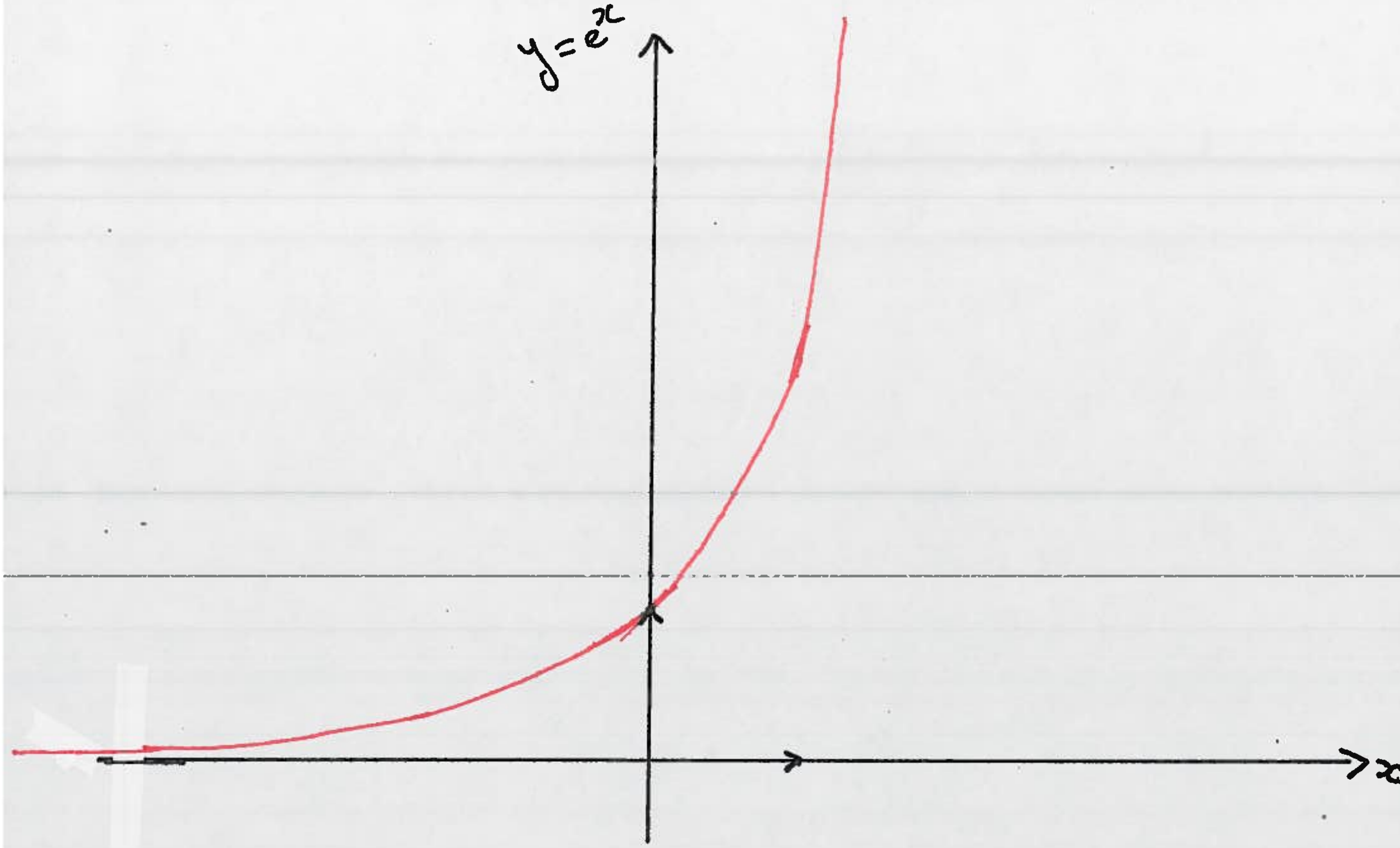
$\left[\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty \right]$

. Signe dérivée première ?

$f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ strictement croissante.

D'où :





- Fonction strictement croissante et strictement convexe.

- Monte vers $+\infty$ très rapidement (pente à $+\infty$ tend vers $+\infty$)