Optimisation libre de fonctions de n variables

Décembre 2016

Optimisation libre d'une fonction de n variables

- La méthode est similaire au cas à 1 variable.
  - on va considérer une condition nécessaire du premier ordre,
    - basée sur la dérivée première nulle en un point.
  - on va ensuite considérer une condition suffisante du second ordre,
    - basée sur la courbure de la fonction (dérivée seconde).

Condition du premier ordre pour un max (1)

- Soit f une fonction de n variables. La condition nécessaire de premier ordre est que

$$\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = 0, \\ \qquad \vdots \\ f_n(x_1, ..., x_n) = 0. \end{cases} \qquad \textit{(CPO)}$$

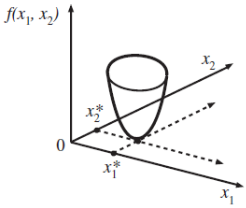
- Cette CPO identifie un ou des point(s) stationnaire(s) $(x_1^*, ..., x_n^*)$ **satisfaisant l'ensemble des équations** du système ci-dessus.

Condition du premier ordre pour un max (2)

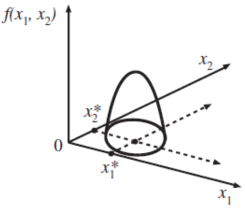
- Là aussi, c'est une **condition nécessaire** pour un maximum, car toute autre possibilité peut être écartée.
  - si une des dérivées partielles est différente de zéro, on peut trouver un point plus élevé sur l'enveloppe de la fonction.

- Cette condition nécessaire n'est **pas forcément suffisante**. La CPO peut identifier:
  - un maximum,
  - un minimum,
  - un point d'inflexion,
  - un point de selle.

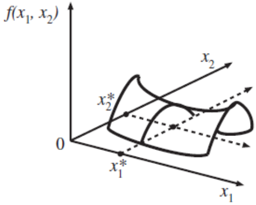
maximum - minimum - point de selle



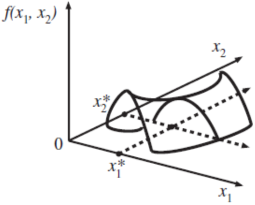
(a) minimum in x_1-direction, minimum in x_2-direction



(b) maximum in x_1-direction, maximum in x_2-direction



(c) minimum in x_1-direction, maximum in x_2-direction



(d) maximum in x_1-direction, minimum in x_2-direction

Figure 12.1 Possible cases of stationary values of $f(x_1, x_2)$

Condition du second ordre pour un max (1)

- Là aussi, tout dépend de la courbure de la fonction:

- On a un maximum quand la fonction est concave autour de $(x_1^*, ..., x_n^*)$.

- On a un minimum quand elle est convexe autour de $(x_1^*, ..., x_n^*)$.

- On a un point de selle quand elle est "concave dans une direction et convexe dans une autre direction".

Condition du second ordre pour un max (2)

- Condition de second ordre pour un **maximum global**:

  Le point identifié par la CPO est un maximum global, si la fonction est strictement concave partout.

Si H_f est défini négatif pour tout x, alors le maximum en x^* est **global**.

- Condition de second ordre pour un **maximum local**:

  Le point identifié par la CPO est un maximum local, si la fonction est strictement concave localement.

Si $H_f(x^*)$ est défini négatif, alors le maximum en x^* est **local**.

Condition du second ordre pour un max (3)

- *Intuition:* Pour avoir un maximum, il faut qu'un déplacement à partir du point stationnaire *dans n'importe quelle direction* fasse baisser la fonction. C'est le cas si f est strictement concave (H_f défini négatif).

- Comme dans le cas d'une seule variable, un maximum est associé à la concavité de la fonction objectif.

- Un maximum global requiert une propriété globale; un maximum local requiert une propriété locale.

Conditions pour un min

- Là aussi, nous pouvons chercher un min de f en cherchant un max de $-f$ et en utilisant la méthode ci-dessus...

- Les conditions pour un min sont (presque) les mêmes que pour un max:

$$\underline{\text{max}} \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\text{min}}$$

$$\begin{cases} \text{pt stationnaire,} \\ f \text{ strict. concave} \\ (H_f \text{ défini négatif}). \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{pt stationnaire,} \\ f \text{ strict. convexe} \\ (H_f \textit{ défini positif}). \end{cases}$$

Récapitulatif

- **Notions importantes:**
  - CPO,
  - Point de selle,
  - CSO (max global, max local),
  - Conditions pour un min.

Appendice A: Problèmes économiques

- .Monopoleur avec produits multiples.
- Duopole “à la Cournot”.

Appendice B: Problèmes mathématiques

- Pour les fonctions suivantes: (i) cherchez les points stationnaires *[CPO]*, (ii) vérifiez si ce sont des maxima, des minima ou autre *[CSO]* et *(iii)* calculez la valeur prise par la fonction à l'extremum éventuel.

1. $f(x, y) = 2x^2 + y^2$.
2. $f(x, y) = 4x + 2y - x^2 - y^2 + xy$.
3. $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 - x + 2y$.
4. $f(x_1, x_2) = x_1 - e^{x_1} + x_2 - e^{x_2}$.