Introduction aux fonctions de plusieurs variables

Décembre 2016

Fonctions de plusieurs variables (1)

- Le problème économique classique implique un choix entre plusieurs options, à partir de ressources limitées.

- Nous commençons par étudier le choix entre plusieurs options:
  - mathématiquement, l'optimisation *libre* d'une fonction de plusieurs variables.

- Plus tard, nous prendrons en compte les ressources limitées:
  - mathématiquement, l'optimisation *sous contraintes* d'une fonction de plusieurs variables.

Fonctions de plusieurs variables (2)

- Le choix peut être celui d'une firme, entre capital et travail:
  - production $Y = H^{\alpha}K^{1-\alpha}$. *(optimisation libre)*

- Le choix peut être celui d'un travailleur, entre consommation et loisir,
  - utilité $u = \ln c + A \ln l$. *(optimisation sous contrainte)*

- Le choix peut être celui d'un consommateur, entre bien $\mathcal{A}$, bien $\mathcal{B}$ et bien $\mathcal{C}$:
  - utilité $u = c_a^{\alpha} c_b^{\beta} c_c^{\gamma}$. *(optimisation sous contrainte)*

Fonctions de plusieurs variables (3)

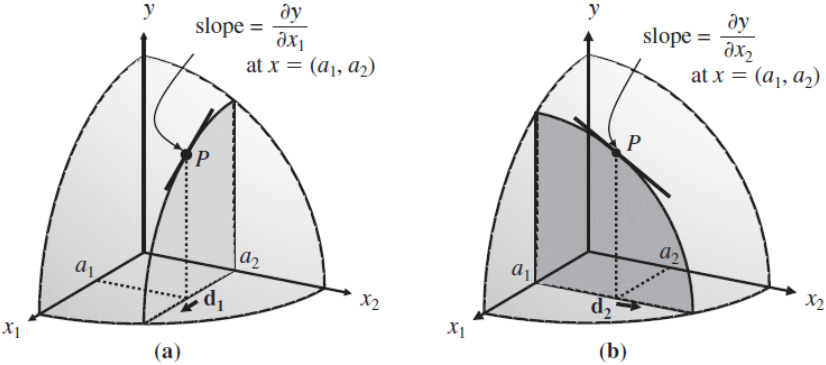
- Une fonction de plusieurs (n) variables est une règle associant un élément de $\mathbb{R}$ à un élément de $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$y = f\left(x_1, ..., x_n\right), \quad \text{où } \left(x_1, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

  Le domaine de définition doit préciser un domaine pour *chaque* variable x_i.

- Graphiquement, la fonction n'est plus représentée par une courbe, mais par une **enveloppe**.

Une section de l'enveloppe montre les variations de la fonction quand une des variables est fixée:



Continuité - différentiabilité

- Les notions de continuité et de différentiabilité, bien que similaires dans l'esprit, doivent être adaptées au fait qu'il y ait plusieurs variables, et donc que l'on puisse faire varier la fonction "dans plusieurs directions".

- La fonction f est continue en $(a_1, ..., a_n)$, si $f(x_1, ..., x_n)$ tend vers $f(a_1, ..., a_n)$ quand x tend vers a.

- Pour la différentiabilité, le problème est que la pente quand x_1 augmente n'est pas forcément la même que la pente quand x_2 augmente...

Différentiabilité (1)

- L'idée est de considérer le taux de variation (et sa limite) quand une seule des variables (x_i) varie et que les autres variables $(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ sont fixes.

- On parle alors de dérivée, non pas par rapport à x, mais de dérivée par rapport à la $i^{ème}$ variable.

- Il y a donc n dérivées de f en un point $(a_1, ..., a_n)$.

Différentiabilité (2)

- La dérivée par rapport à la $i^{ème}$ variable au point $(a_1, ..., a_n)$ est définie comme:

$$f_i(a_1, ..., a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 ..., a_i + h, ...a_n) - f(a_1 ..., a_i - h, ...a_n)}{2h}.$$

- On parle alors de dérivée *partielle* (du premier ordre) par rapport à x_i. Ainsi calculée, f_i représente la pente de l'enveloppe selon la direction x_i.

Différentiabilité (3)

- Il n'y a pas de nouvelles règles de dérivation,
    - en effet, pour dériver une fonction de n variables, on ne fait que varier une seule des variables à la fois, en gardant les autres variables fixes.

- Quand on calcule une dérivée partielle, il faut juste bien garder en tête quelle variable varie et quelles variables sont fixes...

Différentiabilité (4)

- Une fonction de n variables possède n dérivées partielles du premier ordre.
- Chaque dérivée partielle est une fonction de n variables - qui peut aussi être dérivée.
- La dérivation de chaque dérivée partielle du premier ordre donne n dérivées partielles du second ordre.
- Il y a donc n^2 dérivées partielles du second ordre.

Différentiabilité (5)

- La dérivée partielle du second ordre f_{ij} s'écrit

$$f_{ij}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial f_i(x_1, ..., x_n)}{\partial x_j}.$$

- Exprimée ainsi, c'est la dérivée de f_i par rapport à x_j.

- Elle s'obtient (i) en dérivant f par rapport à x_i pour obtenir f_i, puis (ii) en dérivant f_i par rapport à x_j pour obtenir f_{ij}.

Différentiabilité (6)

- Les dérivées secondes partielles f_{ij} pour $i \neq j$ sont dénomées "dérivées croisées".

- **Théorème de Young**:

  Si $f(x_1, ..., x_n)$ est une fonction deux fois différentiable, alors l'ordre de dérivation pour les dérivées secondes croisées n'importe pas. Donc,

$$f_{ij} = f_{ji} \quad \text{pour tout } (i, j).$$

- *Il est inutile de calculer f_{ij} et f_{ji}, le résultat est le même...*

Courbure (1)

- Les notions de concavité et de convexité sont similaires au cas de fonctions d'une variable, *en considérant des enveloppes plutôt que des courbes.*

- La fonction représentée en page 5 est (strictement) concave.
  - l'enveloppe est située "au-dessus" du segment joignant deux points quelconques pris sur cette enveloppe.

- Encore une fois, la courbure d'une fonctions de plusieurs variables est déterminée par les propriétés de la dérivée seconde.
  - mais ici, il n'y a pas ce dérivée seconde unique, mais plutôt n^2 dérivées partielles secondes...

Courbure (2)

- <u>Définition:</u> Le Hessien H_f associé à la fonction f est la matrice $n \times n$ composée des dérivées partielles secondes de f:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}.$$

- *Remarque*: Le théorème de Young implique que le Hessien est une matrice symétrique.

Courbure (3)

- La nature du Hessien de f détermine la courbure de la fonction.

- **Théorème:**

  Soit une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et H_f son Hessien.

$$\begin{cases} \text{Si } H_f \text{ est défini négatif sur } \mathbb{R}^n, f \text{ est strictement concave sur } \mathbb{R}^n, \\ \\ \text{Si } H_f \text{ est défini positif sur } \mathbb{R}^n, f \text{ est strictement convexe sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Courbure (4)

- Pour caractériser le Hessien de f, il faut étudier ses mineurs principaux primaires.

- **Théorème:**

  Soit f une fonction et H_f son Hessien. Ses mineurs principaux primaires (mpp) ont été calculés.

$$\begin{cases} \text{Si } mpp_1 < 0,\ mpp_2 > 0,\ mpp_3 < 0,\ mpp_4 > 0 \ldots \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad \text{alors } f \text{ est } \textbf{strictement concave} \text{ sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } mpp_1 > 0,\ mpp_2 > 0,\ mpp_3 > 0,\ mpp_4 > 0 \ldots \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad \text{alors } f \text{ est } \textbf{strictement convexe} \text{ sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Récapitulatif

- **Notions importantes:**
  - Enveloppe d'une fonction.
  - Dérivées partielles du 1^{er} et 2^{nd} ordre.
  - Théorème de Young.
  - Concavité et convexité de fonctions de n variables.
  - Hessien et courbure.

Appendice A: Quelques résultats "classiques"

- Définition: Une fonction $y = f(x_1, ..., x_n)$ est dite "additivement séparable" si elle peut s'écrire comme la somme de n fonctions d'une variable seulement, i.e.:

$$f(x_1, ..., x_n) = g^{(1)}(x_1) + ... + g^{(n)}(x_n).$$

  Par exemple $y = \ln x_1 + \ln x_2 + x_3$ est une fonction additivement séparable, mais $y = \ln x_1 + \ln x_2 + x_1 x_3$ ne l'est pas.

- Les dérivées partielles du 1^{er} ordre suivant la variable x_i d'une fonction additivement séparable ne sont fonction que de x_i:

$$f_i(x_1, ..., x_n) = g^{(i)\prime}(x_i).$$

Appendice A: Quelques résultats "classiques"

- Les dérivées partielles du 2^{nd} ordre f_{ii} d'une fonction additivement séparable ne sont fonction que de x_i. Les dérivées partielles croisées f_{ij} sont nulles.

$$f_{ii}(x_1, ..., x_n) = g^{(i)\prime\prime}(x_i) \quad \text{et} \quad f_{ij}(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

- On en déduit que le Hessien d'une fonction additivement séparable est une matrice diagonale:

$$H_f = \begin{bmatrix} g^{(1)\prime\prime}(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g^{(2)\prime\prime}(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g^{(n)\prime\prime}(x_n) \end{bmatrix}.$$

Appendice A: Quelques résultats "classiques"

- On en déduit que pour une fonction additivement séparable f (avec "sous-fonctions" $g^{(i)}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Si chaque sous-fonction est strictement concave,} \\ \text{alors } f \text{ est strictement concave.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Si chaque sous-fonction est strictement convexe,} \\ \text{alors } f \text{ est strictement convexe.} \end{array} \right.$$

- Ainsi, la courbure de fonctions additivement séparables est simple à vérifier.

Appendice A: Quelques résultats "classiques"

- Le Hessien permet aussi de vérifier si une fonction est (simplement) concave ou convexe.
- Une fonction f est concave si et seulement si son Hessien est semi-défini négatif.
- **Théorème:**

  Soit f une fonction et H_f son Hessien. Ses mineurs principaux (mp) ont été calculés.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Si } mp_1 \leq 0,\ mp_2 \geq 0,\ mp_3 \leq 0,\ mp_4 \geq 0\ldots \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{alors } f \text{ est concave sur } \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

(Attention: cela doit être vérifié pour tous les mp's, quel que soit leur ordre.)

Appendice A: Quelques résultats “classiques”

- Une fonction f est convexe si et seulement si son Hessien est semi-défini positif.

- **Théorème:**

  Soit f une fonction et H_f son Hessien. Ses mineurs principaux (mp) ont été calculés.

$$\begin{cases} \text{Si } mp_1 \geq 0,\ mp_2 \geq 0,\ mp_3 \geq 0,\ mp_4 \geq 0\ldots \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad \text{alors } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(Attention: cela doit être vérifié pour tous les mp's, quel que soit leur ordre.)

Appendice B: Exercices pratiques

- Calculez les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:
  1. $Y = H^{\alpha} K^{1-\alpha}, \ \ 0 < \alpha < 1.$ *(Cobb-Douglas)*
  2. $f(x, y) = x^2 y.$
  3. $f(x, y) = \sqrt{xy}.$
  4. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2)\ln(x_1 + 3x_2) + x_3.$
  5. $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z.$

- Pour les fonctions suivantes, (i) calculez le Hessien, (ii) vérifiez le théorème de Young, et (iii) déterminez la courbure:
  1. $f(x_1, x_2) = 10 - x_1^2 - x_2^2.$
  2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$
  3. $f(x, y) = \ln x + \ln y.$
  4. $f(x, y) = e^x + e^y.$