## Cas général

problem

$$E_t\left[f(y_{t+1}, y_t, x_{t+1}, x_t)\right] = 0$$

$\mathbb{R}^{n_y}$ $\mathbb{R}^{n_x}$

(état)
$x_t$ : pré-determinées
$y_t$ : non prédeterm.

$$f : \mathbb{R}^{2n_y+2n_x} \to \mathbb{R}^{n_y+n_x}$$

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \text{endog.} \\ \to \text{exog.} \quad (n_\varepsilon \times 1) \end{matrix}$$

$\tilde{\eta} : n_\varepsilon \times n_\varepsilon$

$$x_{t+1}^2 = \tilde{h}(x_t^2) + \tilde{\eta}\sigma\varepsilon_{t+1}.$$

$\varepsilon$ iid
$E(\varepsilon) = 0$
$E(\varepsilon\varepsilon') = I$
$\sigma$ : "given" parameter

(Pb transformé à trouver la loi de transition pour $x_t^2$)

solution $\to$ règle de décision $\begin{cases} y_t = \hat{g}(x_t) \\ x_{t+1} = \hat{h}(x_t) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1} \end{cases}$

Approximé par $\begin{cases} y_t = g(x_t, \sigma) \\ x_{t+1} = h(x_t, \sigma) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1} \end{cases}$

$\boxed{\text{Trois étapes:}}$

1) Trouver état stationnaire $(x, y)$ and $\sigma = 0$.

2a). Développement ordre 1:

$$y_t \approx \overbrace{g(x,0)}^{=y} + (x_t - x)\, g_x(x,0) + \sigma\, g_\sigma(\sigma,0)$$

$$x_{t+1} \approx \underbrace{h(x,0)}_{x} + (x_t - x)\, h_x(x,0) + \sigma\, h_\sigma(\sigma,0)$$

→ coeffs à déterminer.

2b). Substitution règles dans système.

$$E_t\left[ f(y_{t+1}; y_t; x_{t+1}; x_t) \right] = 0$$

$$\Rightarrow E_t\left\{ f\left[ g(x_{t+1},\sigma); g(x_t,\sigma); h(x_t,\sigma) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}; x_t \right] \right\} = 0$$

$$\Rightarrow E_t\left\{ f\left[ g\left(h(x_t,\sigma) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}, \sigma\right); g(x_t,\sigma); h(x_t,\sigma) + \eta\sigma\varepsilon_{t+1}; x_t \right] \right\} = 0$$

. Peut-être vu comme fonction de $(x_t, \sigma)$, $F(x_t,\sigma) = 0$

. Fonction nulle $\Longrightarrow$ toutes ses dérivées partielles sont nulles.

$$\begin{cases} F_x = 0 \rightarrow \text{donne } g_x(x,0) \text{ et } h_x(x,0) \\ F_\sigma = 0 \rightarrow \text{donne } g_\sigma(x,0) \text{ et } h_\sigma(x,0) \end{cases}$$

(gardant solution stable)

(syst. linéaire)

en fait $g_\sigma(x,0) = h_\sigma(x,0)$

$\Rightarrow$ On a CEP à l'ordre 1.

3) Développement ordre 2 :

- Développement $y$ et $x$ au second ordre.
- Introduit nouveaux coefficients :

$$\begin{cases} g_{xx}, g_{x\sigma}, g_{\sigma\sigma} \\ h_{xx}, h_{x\sigma}, h_{\sigma\sigma} \end{cases}$$

→ obtenu en utilisant les conditions que $F_{xx} = F_{x\sigma} = F_{\sigma\sigma} = 0$.

→ systèmes linéaires.

---

(Rappel : Taylor ordre 2 :

- $$F(x,y) \simeq F(a,b) + (x-a) F_x(a,b) + (y-b) F_y(a,b) + \frac{1}{2}\left[(x-a)^2 F_{xx}(a,b) + (y-b)^2 F_{yy}(a,b) + 2(x-a)(y-b) F_{xy}(a,b)\right]$$

- Taylor ordre 2, plus de 2 variables :

$$F(X) = F(A) + (X-A)^T DF(A) + \frac{1}{2}(X-A)^T D^2F(A)(X-A)$$

$$DF(A) = \left[F_{x_1}(A) \ldots F_{x_n}(A)\right]^T$$

$$D^2F(A) = \begin{bmatrix} F_{x_1x_1}(A) & \ldots & F_{x_1x_n}(A) \\ \vdots & & \\ F_{x_nx_1}(A) & \ldots & F_{x_nx_n}(A) \end{bmatrix}$$