ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I - Examen final **Hiver 2015**
Professeur: Alain Delacroix

- Écrivez vos nom, prénom et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Rendez l'examen **avec les questions**.

** **Aucune documentation n'est permise.** Matériel permis sur la table: stylos, règle et calculatrice.

Question 1 (15 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = (1 - x)(y - 2).$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Trouvez-vous des maxima/minima, locaux/globaux ou un/des points de selle? Expliquez.
Soit la fonction

$$f(x, y) = x \ln x + y^2.$$

c. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
d. Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Trouvez-vous des maxima/minima, locaux/globaux ou un/des points de selle? Expliquez.
e. Utilisez votre résultat pour montrer que, pour tout (x, y) dans le domaine de définition de f, $f(x, y) > 1$.

Question 2 (10 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x, y) = \ln x + \ln y - \alpha x - y.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Trouvez une condition sur le paramètre α qui garantit l'existence d'un extremum. Pour cela, passez par les conditions de premier et second ordre. Précisez s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum, et s'il est local ou global. Expliquez tout.

Question 3 (15 points):
Soit la fonction suivante

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + p^2 z^2,$$

où p est un paramètre non nul.
a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Vérifiez que cette fontion a toujours un point stationnaire et que ce point stationnaire est le même quel que soit le paramètre p. Expliquez.
c. Vérifiez que cette fontion a toujours un extremum global quelque soit le paramètre p. Cet extremum est-il un minimum ou un maximum? Expliquez.

d. Montrez qu'à cet extremum, la fonction atteint toujours la même valeur, quelque soit le paramètre p.

Question 4 (10 points):
Soit la fonction suivante
$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2.$$
a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Cherchez les extrema éventuels en passant par les conditions de premier et second ordre. Précisez si l'extremum est local ou global. Pourquoi?
c. Quelle valeur cette fonction prend-elle à son extremum? Expliquez.

Question 5 (15 points):
On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:
$$\min_{x,y} e^x + e^{-y} \quad t.q. \quad x - y = 2.$$
a. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*). Expliquez.
b. Vérifiez que les conditions de second ordre sont satisfaites. Expliquez.
c. Quelle valeur la fonction atteint-elle au point stationnaire?

Question 6 (15 points):
On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:
$$\max_{x,y} \alpha - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad t.q. \quad x + y = 2\alpha.$$
Nous restreignons l'analyse aux valeurs strictement positives de x et y. Le paramètre α est également supposé strictement positif.
a. Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*) en fonction de α. Expliquez.
b. Utilisez les conditions de second ordre pour vérifier que (x^*, y^*) est la solution du problème.
c. Pour quelles valeurs de α est que la fonction $f(x,y) = \alpha - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ est toujours négative ou nulle, quand la contrainte $x + y = 2\alpha$ est satisfaite? Expliquez.

Question 7 (20 points):
a. On pose le problème de maximisation sous contrainte suivant:
$$\max_{x,y} \frac{1}{2} - x^2 - y^2 \quad t.q. \quad x + y = 1.$$
Formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire (x^*, y^*). Est-ce que les conditions de second ordre pour un maximum sont satisfaites? S'il existe, quelle est la valeur M^* de la fonction au point stationnaire?
b. Le problème est maintenant:
$$\max_{x,y} \frac{1}{2} - x^2 - y^2 \quad t.q. \quad x + y = T,$$
où T est un paramètre.
Comme en (7a), cherchez le point stationnaire et vérifiez les conditions de second ordre. Exprimez le maximum M^* en fonction de T. Calculez la dérivée $\frac{dM^*}{dT}$. Quel résultat théorique vu en classe pouvons-nous ainsi vérifier?