Nous avons vu trois méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires: (i) par élimination, (ii) par substitution et (iii) par la "règle de Cramer". Les deux premières méthodes sont très simples à utiliser dans le cas de deux variables. Par contre, la méthode de Cramer peut être systématiquement utilisée dans tous les cas. Je donne ci-dessous la méthode générale de Cramer dans le cas $n \times n$.

Soit donc un système linéaire de n équations à n inconnues $(x_1, ..., x_n)$. Il peut être écrit comme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Écrit sous forme matricielle, cela devient

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

De façon compacte, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A}$ est la matrice $n \times n$ composée des éléments a_{ij} du système linéaire, $\mathbf{x}$ est le vecteur $n \times 1$ composé des inconnues et b est le vecteur $n \times 1$ composé des coefficients constants du système.

Règle de Cramer: Soit $|\mathbf{A}|$ le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$. Pour qu'il y ait une solution unique $(x_1^*, ..., x_n^*)$ au système ci-dessus, il faut que $|\mathbf{A}| \neq 0$. Si c'est le cas,[1] alors la solution est la suivante: *pour tout* $i = 1, ..., n$,

$$x_i^* = \begin{array}{c} \textit{(}i^{\grave{e}me}\textit{ colonne)} \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Le dénominateur est le déterminant $|\mathbf{A}|$ caractéristique du système. Au numérateur, on place le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\grave{e}me}$ colonne de $\mathbf{A}$ par le vecteur $\mathbf{b}$.

Sur un exemple: Soit le système à résoudre

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 298, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 298 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$x_1 = \begin{vmatrix} 298 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 100 \quad \text{et} \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 298 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 99.$$

[1] Si $|\mathbf{A}| = 0$, alors le système possède soit zéro solution, soit une infinité de solutions.