Le but de ce rappel mathématique est de créer un document de référence à usage pratique. Les explications pour les formules fournies sont placées en appendice. **Je ne vous demande que de connaître les formules (et savoir les appliquer). Les explications sont là pour ceux qui aimeraient savoir d'où viennent ces formules...**

1 Exposants

Nous allons souvent rencontrer la notion de *fonction de production*. Concrètement, c'est un outil mathématique qui nous permet de relier la capacité de production d'une économie aux facteurs de production (typiquement mais pas exclusivement, travail et capital). Ainsi,

$$\underbrace{Y}_{\text{production}} = F(\underbrace{K}_{\text{capital}}, \underbrace{L}_{\text{travail}}).$$

En pratique, nous allons presque toujours utiliser la fonction suivante dite Cobb-Douglas $Y = K^{\alpha} \times L^{1-\alpha}$ et en particulier

$$Y = K^{1/3} \times L^{2/3}.$$

(Nous verrons en cours pourquoi cette fonction particulière est si couramment utilisée.) Cela nous amènera à "manipuler" cette fonction, voici donc un rappel sur les manipulations d'exposants.

Définition:

$$x^n = \underbrace{x \times x \times ... \times x}_{\text{n fois}}.$$

Par exemple, $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

Les exposants permettent donc de simplifier la notation, mais ils sont aussi très pratiques à manipuler. Voici une liste de formule utiles:

$$\begin{cases} x^m \times x^n = x^{m+n}, & (\#1) \\ (x^m)^n = x^{m \times n}, & (\#2) \\ x^0 = 1, & (\#3) \\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}, & (\#4) \\ \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, & (\#5) \\ (x \times y)^n = x^n \times y^n, & (\#6) \\ (\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}. & (\#7) \end{cases}$$

Remarque: l'exposant n n'est pas nécessairement un nombre *entier* (i.e. $2, 3, 4...$). En fait, si x est positif, ce qui sera toujours le cas dans nos applications puisque capital et travail sont des quantités positives, l'exposant peut être n'importe quel nombre dit *réel*, positif ou négatif. En particulier, avec la fonction de production ci-dessus, les exposants sont des fractions. Que veut donc dire $K^{1/3}$? Et bien, $K^{1/3}$ est la même chose que la racine cubique de K ou $\sqrt[3]{K}$ puisque $(K^{1/3})^3 = K^{(3\times(1/3))}$ d'après la formule #2 et donc $(K^{1/3})^3 = K^1 = K$. De même, $K^{1/n} = \sqrt[n]{K}$ (racine $n^{\text{ième}}$ de K). En particulier, la racine carrée de K peut s'écrire comme cela aussi, $\sqrt{K} = K^{1/2}$.
Qu'en est-il de $L^{2/3}$ alors? Et bien, $L^{2/3} = (L^2)^{1/3}$ d'après la formule #2 et donc $L^{2/3}$ est la racine cubique de "L au carré".

Exemple:
Au niveau des calculs, n'importe quelle machine à calculer digne de ce nom peut élever un nombre à un exposant réel quelconque. Mais pour nous, une exemple peut être utile. Prenons la fonction Cobb-Douglas qui nous donne le PIB Y en fonction du capital et du travail utilisé, $Y = K^{1/3} \times L^{2/3}$. Ici, Y est le revenu total dans l'économie. Disons que nous désirions calculer le revenu par personne ou revenu moyen y. Par définition, $y = \frac{Y}{L}$ et donc

$$y = \frac{K^{1/3} \times L^{2/3}}{L} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{formule 1}}}{=} \frac{K^{1/3} \times L^{2/3}}{L^{1/3} \times L^{2/3}} = \frac{K^{1/3}}{L^{1/3}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{formule 7}}}{=} \left(\frac{K}{L}\right)^{1/3}.$$

Ainsi, le revenu moyen n'est qu'une fonction du capital par personne K/L. Cette propriété remarquable va être très pratique lorsque nous étudierons la croissance. Si on dénote ce capital par personne $k = K/L$, alors on a que $y = k^{1/3}$.

Appendice: d'où viennent les formules?

Formules avec exposants:

• Il est possible de comprendre intuitivement ces formules. Pour les formules #1 et #2, nous comptons combien de fois nous trouvons x pour connaître l'exposant au final:

$$x^m \times x^n = (\underbrace{x \times ... \times x}_{\text{m fois}}) \times (\underbrace{x \times ... \times x}_{\text{n fois}}) = \underbrace{x \times ... \times x}_{\text{m+n fois}} = x^{m+n},$$

et

$$(x^m)^n = (\underbrace{x^m \times ... \times x^m}_{\text{n fois}}) = (\underbrace{(\underbrace{x \times ... \times x}_{\text{m fois}}) \times ... \times (\underbrace{x \times ... \times x}_{\text{m fois}})}_{\text{n fois}}) = x^{m \times n}.$$

• Pour la formule #3, il suffit de remarquer, en utilisant la formule #2, que $x^n \times x^0 = x^{n+0} = x^n$. On en déduit que $x^0 = 1$.

• Nous pouvons maintenant expliquer la formule #4. La formule #2 nous permet d'écrire que $x^n \times x^{-n} = x^{n-n} = x^0 = 1$. Si $x^n \times x^{-n} = 1$, alors $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

• Finalement, pour expliquer la formule #5, utilisons la formule #4 qui nous permet d'écrire que $\frac{x^m}{x^n} = x^m \times \frac{1}{x^n} = x^m \times x^{-n} = x^{m-n}$.

• La formule #6 est obtenue en regroupant les x et les y,

$$(x \times y)^n = (\underbrace{(xy) \times ... \times (xy)}_{\text{n fois}}) = (\underbrace{x \times ... \times x}_{\text{n fois}}) \times (\underbrace{y \times ... \times y}_{\text{n fois}}) = x^n \times y^n.$$

• Pour la formule #7, écrivons que $(\frac{x}{y})^n = (x \times (y)^{-1})^n = x^n \times (y^{-1})^n$ d'après la formule #6. D'après la formule #2, $(y^{-1})^n = y^{-n}$. Grâce à la formule #4, $y^{-n} = \frac{1}{y^n}$, ce qui nous donne bien que $(\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}$.