Cours: ECO1272 – Méthodes d'analyse économique I
Trimestre: Hiver 2010 **Professeur: Alain Delacroix**

EXAMEN FINAL

TRÈS IMPORTANT:
- Écrivez vos noms, prénoms et code permanent sur chaque question. Rendez l'examen **avec les questions**.
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions. Pour chaque réponse, toutes les étapes doivent être clairement exposées.
- Utilisez une nouvelle page pour chaque nouvelle question. Indiquez clairement les numéros de chacune des questions.
- Matériel permis sur les bureaux : stylos et crayons, règle, pas de calculatrice. Tout autre matériel pourra être confisqué en début d'examen, et remis aux étudiants en sortie d'examen. Aucune documentation n'est permise.

Question 1 (10 points):
Considérez la fonction suivante
$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2.$$
a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Chercher les extrema (minima ou maxima) par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et de second ordre. Expliquez si l'extremum est local ou global.

Question 2 (10 points):
Considérez la fonction suivante
$$f(x, y) = \ln(x^2 + 3) + \ln(y^2 + 5).$$
a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Chercher les extrema par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et de second ordre. Expliquez si l'extremum est local ou global.

Question 3 (15 points):
Considérez la fonction suivante
$$f(x, y) = x^p + y^{2p},$$
où le paramètre $p > 1$. Nous restreignons aussi $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
a. Chercher les extrema par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et de second ordre. Expliquez si l'extremum est local ou global.
b. Quelle est la valeur de l'extremum atteint? Expliquez.

Question 4 (15 points):
Considérez la fonction suivante

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}.$$

a. Quel est le domaine de définition de f? Expliquez.
b. Chercher les extrema par la méthode habituelle, c'est à dire en passant par les conditions de premier et de second ordre. Expliquez si l'extremum est local ou global.

Question 5 (15 points):
On pose le problème de maximisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y} \ln x + \ln y \quad t.q. \quad x + y = 1.$$

a. Trouvez le point stationnaire du Lagrangien en passant par la condition de premier ordre. Expliquez.
b. Vérifiez que vous avez bien trouvé un maximum global en utilisant les conditions de second ordre. Expliquez.
c. Quelle est la valeur du maximum atteint? Expliquez.

Question 6 (15 points):
On pose le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$\min_{x,y} x^2 + y^2 \quad t.q. \quad x + y = m,$$

où la constante $m > 0$.
a. Comment peut-on réécrire ce problème en un problème de maximisation sous contrainte? Expliquez.
b. Après l'avoir réécrit sous la forme d'un problème de maximisation, formez le Lagrangien et trouvez le point stationnaire. Expliquez.
c. Vérifiez que les conditions de second ordre pour un maximum global sont satisfaites. Expliquez.
d. Quelle est la valeur du minimum du problème de départ? A quoi est égale cette valeur quand $m = 2$? Expliquez.

Question 7 (20 points):
On pose le problème de maximisation sous contrainte suivant:

$$\max_{x,y} x^\alpha y^\beta \quad t.q. \quad x + y = 1,$$

où (α, β) sont des constantes positives et où on restreint $x > 0$ et $y > 0$.
a. Formez le Lagrangien pour transformer ce problème de maximisation sous contrainte en un problème de maximisation libre.
b. Chercher les points stationnaires en passant par la condition de premier ordre. Expliquez.
c. Appliquez les conditions de second ordre. Quelles conditions sur (α, β) peut-on imposer pour garantir une maximum global? Expliquez.