Cours: ECO1272 – Méthodes d'analyse économique I
Trimestre: Automne 2008 **Professeur: Alain Delacroix**

EXAMEN FINAL

TRÈS IMPORTANT:
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions.
- Écrivez vos noms, prénoms et code permanent sur chaque question.
- Rendez l'examen **avec les questions**.
- Pour chacune des questions de cet examen, toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées. La proportion des points allouée à la réponse finale est 1/4, et celle allouée à la justification de la réponse est 3/4.

À LIRE ATTENTIVEMENT:
** Matériel permis sur les bureaux : stylos et crayons, règle, pas de calculatrice. Tout autre matériel pourra être confisqué en début d'examen, et remis aux étudiants à leur sortie de la salle d'examen.
** Aucune documentation n'est permise. Écrire lisiblement.
** Répondre aux questions dans l'ordre.
** Utiliser une nouvelle page pour chaque nouvelle question.
** Indiquer clairement les numéros de chacune des questions.

Question 1 (15 points):
Considérez la fonction suivante

$$h(x) = x^n . \ln x, \quad n > 1.$$

a. Quel est le domaine de définition de h? Expliquez.
b. Pour quelles valeurs de x la fonction h est strictement croissante? Expliquez.
c. Pour quelles valeurs de x la fonction h est strictement convexe? Expliquez.
d. Supposez que $n = 2$. Pour quelles valeurs de x la fonction h est à la fois strictement croissante et strictement convexe? Expliquez.

Question 2 (15 points):
Pour chacune de ces fonctions, déterminez la dérivée première et la dérivée seconde. Précisez également le domaine de définition.
a. $f(x) = \sqrt{2x+5}$; b. $f(x) = \frac{e^x}{x}$; c. $f(x) = e^x . \ln x$; d. $f(x) = \frac{1}{x^5}$.

Question 3 (15 points):
Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$q = p^{-\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = bq, \quad b > 0.$$

a. Supposez que le monopoleur chosit la quantité à produire, en tenant compte de la demande pour son produit et ses coûts de production. Exprimez le profit du monopoleur en fonction de la quantité produite. Expliquez.
b. Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Quel profit π^* fait-il? Expliquez.
c. Comment le profit optimal π^* dépend-il de b? Expliquez.
d. Donnez une intuition pour le résultat trouvé en 3.c.

Question 4 (10 points):
Considérez des fonctions de plusieurs variables.
a. Qu'est-ce que le Hessien de telles fonctions?
b. Quelles sont les conditions sur les mineurs principaux primaires pour que la fonction soit strictement concave?
c. Quelles sont les conditions sur les mineurs principaux pour que la fonction soit convexe?

Question 5 (15 points):
Étudiez la fonction
$$f(x) = x.e^{-x}.$$
Cela implique (i) préciser le domaine de définition, (ii) calculer les dérivées premières et secondes, (iii) produire le tableau qui, à partir des signes des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction f, et (iv) tracer la fonction f, à partir de ce tableau. Soyez clair.
Soit la fonction $g(x) = m + x.e^{-x}$, où m est une paramètre. Pour quelles valeurs de m est-ce que la fonction $g(x)$ est toujours négative? Expliquez.

Question 6 (10 points):
a. Soit la fonction additivement séparable de deux variables $f(x_1, x_2) = g(ax_1) + h(bx_2)$, où (a, b) sont deux paramètres non-nuls et $g(.)$ et $h(.)$ sont deux fonctions quelconques. Calculez le Hessien de f.
b. Supposez que $g(.)$ et $h(.)$ soient strictement convexes. Est-ce que f est strictement convexe pour tout (a, b)? Expliquez.
c. Supposez que $g(.)$ et $h(.)$ soient strictement concaves. Est-ce que f est strictement concave pour tout (a, b)? Expliquez.

Question 7 (20 points):
Soit la fonction $f(x, y) = (x. \ln x).(y^2 - 2)$. Quel est son domaine de définition? Cette fonction a-t-elle des points stationnaires? Si oui, sont-ce des maxima ou des minima? Locaux ou globaux? Expliquez.