Université du Québec à Montréal, Département des sciences économiques
Cours: ECO1272 – Méthodes d'analyse économique I
Trimestre: Hiver 2008
Professeur: Alain Delacroix

EXAMEN FINAL

TRÈS IMPORTANT:
- Vous avez trois heures pour répondre aux questions.
- Écrivez vos noms, prénoms et code permanent sur chaque question.
- Rendez l'examen **avec les questions**.
- Pour chacune des questions de cet examen, toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées. La proportion des points allouée à la réponse finale est 1/4, et celle allouée à la justification de la réponse est 3/4.

À LIRE ATTENTIVEMENT:
** Matériel permis sur les bureaux : stylos et crayons, règle, pas de calculatrice. Tout autre matériel pourra être confisqué en début d'examen, et remis aux étudiants à leur sortie de la salle d'examen.
** Aucune documentation n'est permise. Écrire lisiblement.
** Répondre aux questions dans l'ordre.
** Utiliser une nouvelle page pour chaque nouvelle question.
** Indiquer clairement les numéros de chacune des questions.

Question 1 (15 points):
Considérez la fonction d'utilité suivante

$$u(c) = A.c^{\alpha},$$

où c représente la consommation du ménage et A est un paramètre strictement positif. α est un autre paramètre (un nombre réel).
a. Une propriété raisonnable d'une fonction d'utilité est qu'elle soit strictement croissante (en consommation, c). Est-ce que cela impose des restrictions sur les valeurs que α peut prendre? Lesquelles? Expliquez. *(10 points)*
b. Une autre propriété raisonnable est que l'utilité marginale soit strictement décroissante. Cela implique-t-il que u soit strictement concave ou strictement convexe? Est-ce que cela impose des restrictions supplémentaires sur les valeurs que le paramètre α peut prendre? Lesquelles? Expliquez. *(5 points)*

Question 2 (15 points):
Pour chacune de ces fonctions, déterminez la dérivée première et la dérivée seconde. Précisez également le domaine de définition.
a. $f(x) = \frac{x^5+36\ln x}{2x}$; b. $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$; c. $f(x) = x.\ln x - x$; d. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Question 3 (15 points):
Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$q = 100.p^{-2},$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = q.$$

a. Supposez que le monopoleur chosit la quantité à produire, en tenant compte de la demande pour son produit et ses coûts de production. Exprimez le profit du monopoleur en fonction de la quantité produite. Expliquez.
b. Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Quel profit π^* fait-il? Expliquez.

Question 4 (15 points):
Supposez que la fonction à deux variables $f(x, y)$ soit additivement séparable, c'est-à-dire que $f(x, y) = g(x) + h(y)$, où $g(.)$ et $h(.)$ sont des fonctions d'une seule variable.
a. Calculez le Hessien de la fonction f.
b. Trouvez les conditions sur les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ pour que la fonction $f(x, y)$ soit globalement strictement concave. Expliquez.
c. Que peut-on conclure sur les propriétés de concavité/convexité de la fonction f quand $g''(x) \geq 0$ et $h''(y) \geq 0$? Expliquez.

Question 5 (15 points):
Étudiez la fonction

$$f(x) = e^x - p.x,$$

où p est un paramètre strictement positif.
[Cela implique (i) préciser le domaine de définition, (ii) calculer les dérivées premières et secondes, (iii) produire le tableau qui, à partir des signes des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction f, et (iv) tracer la fonction f, à partir de ce tableau.] Soyez clair.
Pour quelles valeurs de p la fonction $f(x)$ est-elle toujours positive? Expliquez.

Question 6 (10 points):
a. Calculez toutes les dérivées partielles premières et secondes de la fonction $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$.
b. Calculez son Hessien et montrez que la fonction est globalement convexe.

Question 7 (15 points):
a. Soit la fonction $f(x, y) = \ln(x.y) - \frac{1}{3}x - y$. Quel est son domaine de définition? Cette fonction a-t-elle des points stationnaires? Si oui, sont-ce des maxima ou des minima? Locaux ou globaux?
b. Mêmes questions pour la fonction $f(x, y) = \ln(x.y) + \frac{1}{3}x - y$.