Université du Québec à Montréal, Département des sciences économiques
Cours: ECO1272 - Méthodes d'analyse économique I
Trimestre: Hiver 2010
Professeur: Alain Delacroix

- Vous avez trois heures pour répondre aux questions.
- Écrivez vos noms, prénoms et code permanent sur chaque cahier d'examen.
- Rendez l'examen **avec les questions**.
- Pour chaque question, toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées. La proportion des points allouée à la réponse finale est 1/4, et celle allouée à la justification de la réponse est 3/4.

À LIRE ATTENTIVEMENT:
** Matériel permis sur les bureaux: stylos et crayons, règle, **pas de calculatrice**. Tout autre matériel pourra être confisqué en début d'examen, et remis à l'étudiant à sa sortie de la salle d'examen.
** Aucune documentation n'est permise.
** Écrivez lisiblement.
**Utilisez une nouvelle page pour chaque question et en indiquez clairement le numéro.

QUESTION 1: (15 points)
Étudiez la fonction

$$f(x) = e^{x^2} + p - 5,$$

où p est un paramètre quelconque.
[Cela implique *(i)* préciser les domaines de définition de f, f'et f'', *(ii)* calculer les dérivées premières et secondes, *(iii)* produire le tableau qui, à partir des dérivées premières et secondes, permet de connaître les propriétés de monotonicité et de concavité de la fonction f, et *(iv)* tracer la fonction f à partir de ce tableau (pour tracer la fonction, il vous faudra prendre une valeur-exemple pour p).]
Pour quelles valeurs de p la fonction est-elle toujours positive? Expliquez.

QUESTION 2: (15 points)
Pour chacune des fonctions suivantes, donnez le domaine de définition D_f et calculez les dérivées premières et secondes.
a. $f(x) = x^2 + x + 1$; b. $f(x) = 3x. \ln x$; c. $f(x) = \sqrt{x}/(1 + x)$; d. $f(x) = \ln \sqrt{x}$.

QUESTION 3: (15 points)
Un monopoleur fait face à la fonction de demande suivante

$$p = 1 - q,$$

où p et q sont respectivement le prix et la quantité demandée. Sa fonction de coût est donnée par

$$C(q) = q^2.$$

a. Supposez que le monopoleur choisisse la quantité à produire, en tenant compte de la demande et de ses coûts de production. Exprimez le profit $\pi(q)$ en fonction de la quantité produite. Expliquez.
b. Quelle quantité q^* maximise ses profits? Quel est le prix p^* correspondant? Détaillez vos calculs.

QUESTION 4: (15 points)
a. Refaites le problème du monopoleur de l'exercice précédent, mais cette fois ci, en lui demandant de maximiser ses profits en choisissant le prix à charger à ses clients, plutôt qu'en choisissant la quantité à produire. Trouvez prix et quantité optimaux. Expliquez.
b. Quel prix choisirait-il s'il cherchait à maximiser ses revenus plutôt que ses profits? Quels seraient alors ses profits? Expliquez.

QUESTION 5: (15 points)
Soit la fonction $h(x) = x^n.(1-x)$ où n est un paramètre positif ($n > 1$) et $x > 0$.
a. Exprimez la condition de premier ordre. Calculez le point x_0 identifié en fonction de n. Expliquez.
b. Utilisez la condition de second orde pour vérifier si x_0 correspond à un maximum ou à un minimum. Est-ce un extremum local ou global? Expliquez. Quelle est la valeur de cet extremum (maximum ou minimum) en fonction de n. Expliquez.

QUESTION 6: (15 points)
Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y = 11 - z, \\ 2x - z = 2y - 5, \\ z + x = y - 1. \end{cases}$$

a. Écrivez le système sous forme matricielle $A.\mathbf{x} = b$.
b. Résolvez le afin d'obtenir (x, y, z) en utilisant la méthode qui se fonde sur l'inverse de la matrice des coefficents. Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées.

QUESTION 7: (10 points)
Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Écrivez le système sous forme matricielle $A.\mathbf{x} = b$. Trouvez la valeur-solution pour x_2 exclusivement en utilisant la méthode de Cramer. Expliquez comment vous procédez.