

Université du Québec à Montréal, Département des sciences économiques  
Cours: ECO1272 – Méthodes d'analyse économique I  
Trimestre: Automne 2008  
Professeur: Alain Delacroix

### EXAMEN INTRA

#### TRÈS IMPORTANT:

- Vous avez trois heures pour répondre aux questions.
- Écrivez vos noms, prénoms et code permanent sur chaque question.
- Rendez l'examen **avec les questions**.
- Pour chacune des questions de cet examen, toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées. La proportion des points allouée à la réponse finale est 1/4, et celle allouée à la justification de la réponse est 3/4.

#### À LIRE ATTENTIVEMENT:

- \*\* Matériel permis sur les bureaux : stylos et crayons, règle, pas de calculatrice. Tout autre matériel pourra être confisqué en début d'examen, et remis aux étudiants à leur sortie de la salle d'examen.
- \*\* Aucune documentation permise. Écrire lisiblement.
- \*\* Répondre aux questions dans l'ordre.
- \*\* Utiliser une nouvelle page pour chaque nouvelle question.
- \*\* Indiquer clairement les numéros de chacune des questions.

*QUESTION 1: (15 points)*

Soit la matrice  $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Trouvez toutes les matrices diagonales  $B$  telles que  $AB = A^2$ . Précisez comment vous obtenez votre réponse (10 points). Quelle doit être la dimension de  $B$ ? Expliquez (5 points).

*QUESTION 2: (10 points)*

2.1 Définissez l'idempotence d'une matrice. (4 points)

2.2 Caractérisez quand une matrice est idempotente. Pourquoi cela suffit-il à satisfaire la définition? Expliquez. (4 points)

2.3 Une matrice idempotente peut-elle être symétrique? (2 points) *La réponse ici doit être simple et précise. En particulier, la réponse n'a pas à contenir de longs calculs.*

QUESTION 3: (10 points)

Soit le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} 5x = 185 - 2y, \\ 4x + 7y = 310. \end{cases}$$

Écrivez ce système d'équations linéaires sous forme matricielle (5 points), et résolvez ce système utilisant la méthode qui se fonde sur l'inverse de la matrice des coefficients (5 points). Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées.

QUESTION 4: (15 points)

Soit le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} 5x + 2z = 8 - 3y, \\ 6y + 2z = 5 + x, \\ 4x - z = 5 - y. \end{cases}$$

4.1 Écrivez le système ci-dessus sous forme matricielle  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . (5 points)

4.2 Trouvez la solution pour  $(x_1, x_2, x_3)$  en utilisant la méthode de Cramer. Expliquez comment vous procédez. (10 points)

QUESTION 5: (10 points)

5.1 Écrire le modèle de comptabilité nationale suivant la forme matricielle  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (5 points):

$$\begin{cases} Y = C + I + G, \\ I = \alpha + \beta Y, \\ C = \gamma + \delta Y, \end{cases}$$

où  $Y$  représente la revenu national,  $C$  représente la consommation nationale,  $I$  représente l'investissement,  $G$  représente les dépenses gouvernementales et où  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  sont des paramètres.

5.2 Ne résolvez pas, mais précisez quand il existe une solution unique à ce système (pour quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ ). Expliquez. (5 points)

QUESTION 6: (25 points)

6.1 Donnez la définition d'une forme quadratique définie positive? d'une forme quadratique semi-définie négative. (5 points)

6.2 Comment peut-on caractériser une forme définie négative? (5 points)

6.3 Caractérisez la forme quadratique suivante:  $3x^2 + 2xz + 2z^2$ . Expliquez. (5 points)

6.4 Pour quelles valeurs de  $g$  la forme quadratique suivante:  $3x^2 + 2gxz + 2z^2$ , est-elle définie positive? Expliquez. (10 points)

QUESTION 7: (15 points)

7.1 Quelle est l'unique matrice  $n \times n$  qui soit à la fois idempotente et inversible? Expliquez. (10 points)

7.2 Est-ce que la forme quadratique  $290x^2 - 20000xy - 33xz - 3y^2 + 2yz - z^2$  peut être négative définie? négative semi-définie? Expliquez. (5 points)