Problème 1 :

Pour chacune des fonctions suivantes, calculez la dérivée première dy/dx. Calculez ensuite la dérivée seconde d^2y/dx^2 des fonctions a) à d).

a) $y = (9x^2 - 2)(3x + 1)$

b) $y = 4x/(x + 5)$

c) $y = a(bx^2 + cx)^2$, où a, b, et c sont des constantes quelconques

d) $y = (16x + 3)^{-2}$

e) $F(y, x) = e^y - xe^x = 0$

f) $y = \ln[x/(1 + x)]$

g) $y = (x^2 + 3)/(x + \ln(x^2))$

h) $y = (5 - x^2)^{-3} + 1$

i) $y = \exp(2x)$

j) $y = (\ln(x))^2$

k) $x = \ln(y + 1)$

l) $y^{3/8}\, x^{5/8} = 10$

Problème 2 :

Soit $C = Q^3 - 6Q^2 + 14Q + 25$, une fonction de coût total, où C représente le coût total de production d'un bien donné et Q représente la quantité produite de ce bien.

a) Quelle est la fonction de coût variable ?

b) Calculer la dérivée dC/dQ. Quelle est l'interprétation économique de cette dérivée?

Problème 3 :

Soit $CM = F/Q + a + bQ$, une fonction de coût moyen, où Q représente la quantité produite, et F, a et b sont trois paramètres de signes positifs.

a) Comment s'écrit la fonction de coût marginal ? Soyez précis.

b) Pour quelle valeur de la variable Q y a-t-il égalité entre le coût marginal et le coût moyen ? Que peut-on en conclure quant à la dérivée de la fonction de coût moyen en ce point ?

Problème 4 :

Pour chacune des deux fonctions de demande suivantes, quelle est l'expression algébrique de l'élasticité-prix de la demande ? Calculez l'élasticité-prix pour P = 1, puis pour P = 6. Notation : Q représente la quantité demandée du produit échangé sur le marché et P représente le prix unitaire de ce produit.

a) $Q = k/P^n$, k et n sont des constantes quelconques. Utilisez d'abord la transformation logarithmique, puis refaites le calcul à partir de la fonction de demande originale, sans la transformer, en vous fondant sur la définition de l'élasticité-prix.

b) $Q = 14-2P$.

Problème 5 :

Pour chacune des deux fonctions $y = f(x)$ suivantes, déterminez le type de courbure de la fonction. Si la fonction est convexe ou concave, précisez si cette convexité ou concavité est stricte ou non.

a) $y = f(x) = -1 + 4x^3, \; x > 0$

b) $y = f(x) = -x^3 + 12x^2 + 3x - 2, \; x \geq 0$

Problème 6 :

Soit $U = U(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2(x_2 + 3)^3$, une fonction d'utilité totale, où x_1 et x_2 représentent les quantités consommées des produits 1 et 2 respectivement.

a) Calculez les fonctions d'utilité marginale de chacun des deux produits.

b) Calculez l'utilité marginale du produit 1 quand 3 unités de chacun des deux produits sont consommées.

Problème 9 :

Déterminez le Hessien de la fonction : $y = f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2^2$

Problème 10 :

Pour chacune des fonctions suivantes, trouvez le(s) point(s) stationnaire(s) de la fonction f. Dites si ce(s) point(s) correspond(ent) à un maximum, un minimum, un point d'inflexion, un point de selle ou autre. S'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum, précisez, quand cela est possible, si cet extremum est local (relatif) ou global (absolu). Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées.

a) $y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$

b) $y = f(x_1, x_2) = ax_1x_2$, où a est une constante quelconque

c) $y = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2$, sous la contrainte $x_1 + 2x_2 = 24$

d) $y = f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$

e) $y = f(x) = -x^5 + 3$

f) $y = f(x) = (x - 2)^4 + 7$

g) $y = f(x,z) = kxz$, où k est une constante non nulle quelconque

h) $y = f(x,z,w) = -0.5x^2 - 1.5z^2 + 1.5xz - 2zw - 3w^2 + 9$

i) $y = f(x,z,w) = e^x + e^z + e^{2w} - 2e^w - (x + z)$

j) $y = f(x,z) = xz$ sous la contrainte $2x + z = m$, où m est une constante quelconque

Les problèmes d'optimisation des sous-questions c) et j) doivent être résolus par la **méthode de Lagrange**. Vous ne devez pas modifier la fonction objectif en y intégrant la contrainte.

Problème 11 :

Soit $C = Q^3/3 - 5Q^2 + 36Q + 20$, la fonction de coût d'une firme, où C représente le coût total de production et Q représente le niveau de production d'un bien produit par la firme.

Si on suppose que la firme doit vendre son produit au prix de 20 dollars par unité, déterminez le niveau de production qui maximise ses profits. Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées.

Problème 12 :

Une firme utilise deux intrants, disons X et Y, pour produire un bien Z. Une unité de Z peut être produite à partir d'une unité de X ou d'une unité de Y. Si la fonction de coût total s'écrit $CT = x^2 + 2y^2 - xy$, où x et y représentent la quantité utilisée des intrants X et Y respectivement, et si l'objectif de la firme consiste à minimiser ses coûts de production sous la contrainte d'un niveau de production de Z égal à 16 unités, trouver les valeurs optimales de x et y.

Problème 13 :

Une firme produit deux biens dont les fonctions de demande sont respectivement:

$$Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2$$
$$Q_2 = 35 - P_1 - P_2$$

La fonction de coût total de la firme est: $C = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10$

Q_i représente la quantité produite (et vendue) du bien i (i = 1,2);

P_i représente le prix du bien i (i = 1,2);

C représente le coût total de production.

Quels sont les niveaux de production Q_1^* et Q_2^* qui maximisent le profit de la firme? Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées. (Suggestion: exprimez le profit comme une fonction de Q_1 et Q_2).

Problème 14 :

Une firme vend deux produits, disons X et Y. Les fonctions de demande pour ces deux biens sont

$2P_x - 26 + 4x + 2y = 0$ Demande pour le produit X
$2P_y - 26 + 2x + 4y = 0$ Demande pour le produit Y

où: x et y représentent les quantités échangées des produits X et Y respectivement;
P_x et P_y représentent les prix de ces deux produits.

Si la fonction de coût total de la firme s'écrit: $CT = x + y$, trouver les valeurs de x et y qui maximisent ses profits.

Problème 15 :

Une firme produit un bien en quantité Q. Les fonctions de demande et de coût de production du bien s'expriment comme suit :

$P = a - bQ$	Fonction de demande
$C = w + vQ$	Fonction de coût total de production

où a,b,v et w sont des paramètres strictement positifs. Supposons que l'État impose une taxe à la production de t dollars par unité produite. Si l'objectif de la firme est de maximiser ses profits, montrer que celle-ci chargera au consommateur, après imposition de la taxe, un prix égal à:

$$P^* = P_o + 0.5t$$

où P_o représente le prix chargé au consommateur avant imposition de la taxe à la production (les prix P^* et P_o sont exprimés en dollars). Cela signifie que le producteur transmet au consommateur la moitié du fardeau de la taxe qui lui est imposée. (Suggestion: résoudre le problème de la firme (i) avant imposition de la taxe, (ii) après imposition de la taxe. Obtenir le prix optimal pour chacun des cas (i) et (ii). Comparer les résultats).

Problème 16 :

Trouvez la solution du problème du consommateur qui maximise son utilité sous contrainte budgétaire. Toutes les étapes de la réponse doivent être clairement exposées.

La fonction d'utilité est: $U(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_2 + 1)$;

la contrainte de budget est: $2x_1 + 5x_2 = 51$;

x_i représente la quantité consommée du bien i ($i = 1,2$).

N.B. : Ce problème d'optimisation doit être résolu par la **méthode de Lagrange**. Vous ne devez pas modifier la fonction objectif en y intégrant la contrainte.